УДК 517.96;517.984

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KhromovAP@info.sgu.ru

Предложен новый прием в методе Фурье для волнового уравнения, базирующийся на широком применении расходящихся рядов в понимании Эйлера, обладающий большой экономичностью в использовании математических фактов и приводящий к значительному усилению известных результатов по методу Фурье для волнового уравнения.

Ключевые слова: метод Фурье, расходящиеся ряды, волновое уравнение.

DIVERGENT SERIES AND FOURIER METHOD FOR WAVE EQUATION

A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KhromovAP@info.sgu.ru

New technique is suggested in Fourier method for wave equation. It is based on wide using of divergent in Euler's sense series and is rather economical in required mathematical facts. The technique leads to considerable improvement of the known results concerning Fourier method for wave equation.

Keywords: Fourier method, divergent series, wave equation.

1. Сначала приведем необходимую информацию о расходящихся рядах из [1]. Рассмотрим простейшее функциональное уравнение:

$$y(x) = 1 + xy(x). \tag{1}$$

Для простоты считаем x вещественным. Из (1) получаем следующее очевидное формальное решение:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \dots \tag{2}$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда ряд (2) сходится и его сумма есть

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{3}$$

т.е. (3) есть решение (1) в этом случае. Но формула (3) имеет смысл при всех x, кроме $x = 1$. Воспользуемся этим.

Пусть $|x| > 1$. Тогда ряд (2) расходящийся и его сумму, как предел частичных сумм, найти мы не можем. Поэтому разумно определить эту сумму как решение уравнения (1) по формуле (3).

Таким образом, у нас теперь сумма ряда (2) определяется решением уравнения (1) при всех x, кроме $|x| = 1$.

Пусть $x = -1$. В этом случае ряд (2), т.е. ряд $1 - 1 + 1 - \ldots$ расходящийся, но мы считаем, что его сумма есть $1/2$ (что разумно из (3)), и в этом случае она представляет обобщенное решение уравнения (1) (т. е. если в (2) положим $x = x_n$, где $|x_n| < 1$, то при $x_n \to -1 + 0$ суммы соответствующих рядов в (2) сходятся к $1/2$).

Пусть $x = 1$. Тогда ряд $1+1+\ldots$ в силу (3) имеет сумму, равную $+\infty$, если его получаем из (3) при $x \to 1-0$ и $-\infty$, если $x \to 1+0$, т. е. сумма расходящегося ряда принимает два значения.

Вывод. Таким образом, ряд (2) в новом понимании дает решение уравнения (1) при всех x, кроме $x = 1$, а при $x = 1$ уравнение (1) не имеет решения.

Отметим еще формулу

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

также приводящую к ряду (2).

Вышеизложенное, за исключением формулы (1), есть у основоположника теории расходящихся рядов Л. Эйлера в его книге [2, с. 99–100]. Отметим еще книгу Харди Г. [3] с обширной информацией о расходящихся рядах.

Теперь приведем слова Эйлера [2, с. 100–101]:

«109. Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определенной суммы, ибо, выполняя сложение членов, мы не имеем приближения к какому-либо пределу, который можно было бы принять за сумму бесконечного ряда. Так как эти суммы уже потому, что мы пренебрегаем последними остатками, являются, как было показано, ошибочными, то это мнение полностью согласуется с истиной. Однако против него можно с полным правом возразить, что упомянутые суммы, хотя они и оказывают совершенно несогласными с истиной, однако никогда не приводят к ошибкам, и что напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество, и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остается развязать этот труднейший узел.

110. И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомне-

ния, что суммы можно получать только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают, могут обнаруживать чередования знаков + и −, в противном же случае они вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложения всех членов. Но в тех случаях, о которых мы упоминали, из неверных сумм получаются верные результаты не потому, что конечное выражение, скажем $\frac{1}{1-x}$, есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т.д., а потому, что это выражение, если его разложить, дает именно такой ряд. Таким образом здесь можно было бы вовсе отказаться от наименования «сумма».

111. Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т.д. истинная сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадет с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защищаться от всяческих обвинений».

2. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t);\ x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \quad (4)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad (5)$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, u'_t(x,0) = \psi(x). \quad (6)$$

Будем предполагать, что все функции, входящие в (4)–(6) комплекснозначные, $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не выходят за рамки $L[0,1]$, $f(x,t)$ подчинено условию $f(x,t) \in L[Q_T]$, где $Q_T = \{x,t|x \in [0,1],\, t \in [0,T]\}$ при любом $T > 0$. Формальное решение по методу Фурье берем в виде [4, 5]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t +$$

$$+R_\lambda(\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]\,d\lambda, \qquad (7)$$

где $\lambda=\rho^2$, $Re\rho\geq 0$, R_λ — резольвента оператора: $Ly=-y''(x)+q(x)y(x)$, $y(0)=y(1)=0$, $r>0$ и достаточно велико, γ_n есть образ в λ — плоскости окружностей $\tilde{\gamma_n}=\{\rho\,|\,|\rho-n\pi|=\delta\}$, $\delta>0$ достаточно мало и фиксировано, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Ряд (7) называется формальным, потому что мы не обращаем внимание на его сходимость.

Обозначим через $Z(x,t,\varphi)$ ряд (7) при $\psi(x)=f(x,t)=0$. Тогда, используя расходящиеся ряды в понимании Эйлера, мы преобразуем формальный ряд (7) к следующему виду:

$$u(x,t)=Z(x,t,\varphi)+\int\limits_0^t Z(x,\tau,\psi)\,d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta. \qquad (8)$$

Достоинство (8) по сравнению с (7) в том, что имеем теперь дело лишь с задачей

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t), \qquad (9)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad (10)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,u'_t(x,0)=0, \qquad (11)$$

при различного вида $\varphi(x)$.

Рассмотрим теперь задачу (9)–(11). Ряд (8) в этом случае переходит в $Z(x,t,\varphi)$. В [6] мы, используя рекомендации А. Н. Крылова [7–9] и расходящиеся ряды в понимании Эйлера, осуществляем переход от ряда $Z(x,t,\varphi)$ к ряду (см. также [10])

$$A(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,t), \qquad (12)$$

где

$$a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta \quad (n=1,2,...),$$

$$f_n(x,t)=-q(x)a_n(x,t) \quad (n=0,1,...),$$

$\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с $[0,1]$ на всю ось, $\tilde{f}_n(\eta,\tau)$ нечетная, 2-периодическая по η и $\tilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$.

Лемма ([4, с. 296]). *Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$. Пусть, далее, $T > 0$ и произвольна и m — наименьшее натуральное число, такое, что $T \le m$. Тогда*

$$\| a_n(x,t) \|_{C[Q_T]} \le M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \in N),$$

где $M_1 = \| a_1(x,t) \|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1) \| q \|_1$ ($\| \cdot \|_1$ – норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \le C_T \| \varphi \|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, то ряд $A_1(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью в Q_T.*

Теорема 2. *Для того, чтобы существовало единственное классическое решение задачи* (9)–(11), *необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Это решение дается формул ой $u(x,t) = A(x,t)$, где теперь $A(x,t)$ есть сумма ряда* (12).

Классическим решением задачи (9)–(11) называем функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t, причем $u_x(x,t)$ ($u_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющую уравнению (9) почти всюду и условиям (10)–(11).

Теорема 3. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, а $\varphi_h(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и $\| \varphi_h - \varphi \|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то соответствующие $\varphi_h(x)$ классические решения $u_h(x,t)$ задачи* (9)–(11) *сходятся по норме $L[Q_T]$ к $A(x,t)$, т. е. в этом случае $u(x,t) = A(x,t)$ является обобщенным решением задачи* (9)–(11).

Ранее в [11], не прибегая к расходящимся рядам, были получены следующие результаты.

Теорема 4. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0,1]$ ($p > 1$), то сумма ряда $Z(x,t,\varphi)$ формального решения задачи* (9)–(11) *является классическим решением задачи* (9)–(11).

Теорема 5. *Если $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ ($p > 1$), то ряд $Z(x,t,\varphi)$ сходится почти всюду и $Z(x,0,\varphi) = \varphi(x)$ почти всюду. Более того, если $\varphi_h(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и $\| \varphi_h - \varphi \|_p \to 0$ при $h \to 0$ ($\| \cdot \|_p$ — норма в $L_p[0,1]$), то соответствующие классические решения $u_h(x,t)$ сходятся в $L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$ к $u(x,t) = Z(x,t,\varphi)$, т. е. $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи* (9)–(11).

В получении теорем 4 и 5 существенно используются пример А. Н. Колмогорова, теорема Карлесона–Ханта и другие глубокие факты действительного анализа, в том числе и теорема Хаусдорфа–Юнга. Отсюда видно, что использование расходящихся рядов в понимании Эйлера приводит к результатам (теоремы 2 и 3) окончательного характера существенно более глубоким, чем теоремы 4 и 5.

Подробные доказательства теорем 1–3 приведены в [5, 6]. Они опирались на формальное решение (7). Приведенное здесь формальное решение (8) вместо (7) улучшает эти доказательства. Каждое слагаемое в (8) есть сумма сходящегося ряда $A(x,t)$ при различных начальных функциях $\varphi(x), \psi(x) \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L[Q_T]$ (t — параметр). Таким образом, формула (8) дает явную формулу обобщенного решения во всех случаях. Соответствующие результаты о классическом решении (9)–(11) получены в [6]; в случае задач (4)–(6) при $\varphi(x) = f(x,t) = 0$ и $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ они могут быть получены аналогично [6].

Отметим, что в работе [12, с. 132–133] нами дан иной, чем метод Фурье, прием решения смешанной задачи. Сравнивая результаты работы [12] с результататами, полученными нами методом Фурье, приходим к заключению, что эти методы равносильны.

Наконец, работа [6, с. 286] приводит к выводу: считать обобщенное решение смешанной задачи истинным решением вне связи его с классическим (есть ли классическое или нет).

Таким образом, автором (в том числе и в соавторстве) получены следующие результаты по смешанной задаче (4)–(6) в классе функций $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L[0,1]$ и $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Классическое решение имеет место при $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывных и $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ почти при всех $x \in [0,1]$ абсолютно непрерывна по t и $f_t(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Обобщенное решение имеет место при всех $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ рассматриваемого класса.

При дополнительном условии, что решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по x и t при $x, t \in [0,1] \times [0,\infty)$ классическое решение имеет место, если $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ непрерывны и $\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0$.

Классическое и обобщенные решения представляются одним и тем же быстросходящимся рядом, члены которого явно выражаются через $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$. Этот ряд при $q(x) = 0$ переходит в формулу Даламбера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Понтрягинские чтения – XXX : материалы междунар. конф. Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.

[2] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. :ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[3] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 54 с.

[4] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59, № 2. С. 286–300. DOI: https://doi.org/10.1134/s0044466919020091

[5] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: https://doi.org/10.1134/s0374064119050121

[6] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

[7] *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

[8] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014, Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: https://doi.org/10.7868/s0869565214260041

[9] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. DOI: https://doi.org/10.7868/s0044466915020052

[10] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Об обобщенном решении по методу Фурье смешанной задачи для волнового уравнения // Теория функций и их приложения : материалы . 19-й междунар Сарат. зим. шк., посвящ. 90-летию П. Л. Ульянова. (29 янв.–2 февр. 2018 г.)ю. Саратов : Изд-во «Научная книга», 2018. С. 156–159.

[11] *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.

[12] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф., посвящ. 90-летию В. А. Ильина (2–6 мая 2018 г.). М. : МАКС Пресс, 2018. С. 132–133.