УДК 517.518+517.983

ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ НА ОСИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_r ОПЕРАТОРАМИ И РОДСТВЕННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)

vitalii.arestov@urfu.ru

Будет обсуждаться задача о наилучшем приближении в пространстве $C(-\infty,\infty)$ оператора дифференцирования порядка k на классе функций с ограниченной производной порядка n, $0 < k < n$, линейными ограниченными в пространстве L_r, $1 \le r < \infty$, операторами. Будут обсуждаться родственные задачи в предду-альном пространстве F_r для пространства мультипликаторов пространства L_r.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова.

APPROXIMATION IN THE UNIFORM NORM ON THE AXIS OF A DIFFERENTIATION OPERATOR BY OPERATORS BOUNDED IN THE SPACE L_r AND RELATED EXTREMAL PROBLEMS[1]

V. V. Arestov (Ekaterinburg, Russia)

vitalii.arestov@urfu.ru

We will discuss the problem of the best approximation in the space $C(-\infty,\infty)$ of the differentiation operator of order k on the class of functions with a bounded derivative of order n, $0 < k < n$, by linear operators bounded in the space L_r, $1 \le r < \infty$. Related problems in the space F_r predual for the space of multipliers of the space L_r will be discussed.

Keywords: differentiation operator, Stechkin problem, Kolmogorov inequality.

Обозначения. Постановка задачи

При $1 \le \gamma < \infty$ через L_γ обозначается лебегово пространство (комплекснозначных) измеримых на оси функций f, у которых функция $|f|^\gamma$ суммируема на оси; это пространство наделено нормой $\|f\|_\gamma = \|f\|_{L_\gamma} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^\gamma dt\right)^{1/\gamma}$. Символами L_∞ обозначается пространство измеримых, существенно ограниченных функций на оси; оно наделено нормой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

[1]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement No. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

$\|f\|_{L_\infty} = \text{ess sup}\{|f(t)| \colon t \in (-\infty, \infty)\}$. Это пространство содержит пространство C непрерывных, ограниченных функций на оси, наделенное равномерной нормой, которое, в свою очередь, содержит подпространство C_0 функций, имеющих нулевой предел на бесконечности. Далее под L_∞ иногда будет пониматься пространство C или даже C_0.

При $1 \le r \le \infty$ и целом $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,\infty}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_\infty$. В $W^n_{r,\infty}$ выделим класс $Q^n_{r,\infty} = \{f \in W^n_{r,\infty} \colon \|f^{(n)}\|_{L_\infty} \le 1\}$. Всюду далее $0 < k < n$.

Обозначим через $\mathcal{B}(L_r)$ множество всех линейных ограниченных операторов в пространстве L_r, а через $\mathcal{B}(N; L_r)$ при $N > 0$ – множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_r} \le N$. Здесь при $r = \infty$ под L_∞ понимается пространство C. Для оператора $T \in \mathcal{B}(L_r)$ положим

$$U(T) = U_{n,k}(T; L_r) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_C \colon f \in Q^n_{r,\infty}\}; \tag{1}$$

если разность $f^{(k)} - Tf$ не принадлежит пространству C, то считаем, что $\|f^{(k)} - Tf\|_C = \infty$. Величину (1) можно интерпретировать как уклонение (в пространстве C) оператора T от оператора дифференцирования $D^k = d^k/dt^k$ на классе $Q^n_{r,\infty}$. При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; L_r) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{B}(N; L_r)\} \tag{2}$$

есть наилучшее приближение (в пространстве C) оператора дифференцирования D^k на классе $Q^n_{r,\infty}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N; L_r)$. Задача состоит в вычислении величины (2) и экстремального оператора $T^*_{n,k} = T^*_{n,k}(N; L_r)$, на котором в (2) достигается нижняя грань; будем называть ее задачей Стечкина или задачей $E_{n,k}(N; L_r)$.

Задача (2) является конкретным вариантом более общей задачи о наилучшем приближении оператора дифференцирования D^k на классе n раз дифференцируемых функций (см. [1, 2] и приведенную там библ.).

Впервые задачу (2) изучал С. Б. Стечкин в классическом случае $r = \infty$, т. е. в пространстве $C = C(-\infty, \infty)$. В частности, он заметил [3], что задача $E_{n,k}(N; C)$ связана с точным неравенством

$$\|f^{(k)}\|_C \le C_{n,k} \|f\|_C^{(n-k)/n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty}^{k/n}, \quad f \in W^n_{\infty,\infty}, \tag{3}$$

между нормами производных дифференцируемых функций, называемым неравенством Колмогорова; а именно, наименьшая константа $C_{n,k}$ в (3) дает для $E_{n,k}(N; C)$ оценку снизу. В. Н. Габушин уточнил этот результат, обосновав равенство (см. детали в [1, § 3])

$$E_{n,k}(N; C) = k \left(\frac{C_{n,k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}}, \quad N > 0. \tag{4}$$

Точное неравенство (3) для $n = 2$, $k = 1$ впервые (1914) получил Ж. Адамар; а для $n = 3, 4$ при всех $1 \le k < n$ и $n = 5$, $k = 2$ – Г. Е. Шилов (1937). А. Н. Колмогоров (1939) году нашел [4] точную константу в неравенстве (3) для всех $1 \le k < n$. Экстремальной в неравенстве (3) является известная функция Фавара – Ахиезера – Крейна

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2\ell+1)t - n\pi/2\right)}{(2\ell+1)^{n+1}}.$$

С. Б. Стечкин [3] получил решение задачи $E_{n,k}(N; C)$ при $n = 2$ и $n = 3$ для $1 \le k < n$. Он показал, что в этих случаях экстремальными операторами $T^*_{n,k}$ являются классические (конечноразностные) операторы; в частности, при $k = 1$

$$(T^*_{2,1} f)(t) = (T^*_{3,1} f)(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}, \quad N = h^{-1}. \tag{5}$$

При $n = 4, 5$ решение этого случая задачи (2) нашел В. В. Арестов (1967), а при произвольном $n \ge 6$ – А. П. Буслаев (1981). При $n \ge 4$ экстремальные операторы бесконечноразностные с равномерными узлами.

Основной результат

Положим $\lambda_n = \|f_n\|_C = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell(n+1)}}{(2\ell+1)^{n+1}}$, $\lambda^*_n = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^{n+1}}$.

Теорема. *При всех $n \ge 2$, $1 \le k < n$, $1 < r < \infty$ для значения задачи* (2) *справедливы оценки*

$$k \left(\frac{\lambda_{n-k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N\,\lambda^*_n}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}} \le E_{n,k}(N; L_r) \le k \left(\frac{\lambda_{n-k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N\,\lambda_n}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}}. \tag{6}$$

Для нечетного $n \ge 3$ и произвольных k, $1 \le k < n$, второе неравенство в (6) *обращается в равенство*:

$$E_{n,k}(N; L_r) = k \left(\frac{\lambda_{n-k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N\,\lambda_n}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}}.$$

Более того, оператор $T^*_{n,k}(N; C)$, экстремальный в задаче $E_{n,k}(N; C)$, будет экстремальным в задаче $E_{n,k}(N; L_r)$ при всех r, $1 \le r \le \infty$.

В работе автора [2] дано решение задачи (2) при $n = 2$, $k = 1$, $r = 2$. В этом случае точным является первое неравенство (6) и экстремальным является сингулярный оператор свертки, отличный от оператора (5).

В доказательстве теоремы основная трудность состоит в обосновании оценки снизу в (6). Для этого используются следующие соображения. Задача Стечкина (2) инвариантна относительно сдвигов. В силу этого в (2) можно ограничиться аппроксимирующими операторами T, также инвариантными относительно сдвигов. Оператор $T \in \mathcal{B}(L_r)$, инвариантный относительно сдвигов, по крайней мере, на множестве S быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, имеет вид свертки $Tf = \theta * f$ с некоторой обобщенной функцией θ. Такие обобщенные функции θ называют мультипликаторами пространства L_r. Множество M_r с нормой $\|\theta(T)\|_{M_r} = \|T\|_{L_r \to L_r}$ является банаховым пространством. Свойствам мультипликаторов посвящена обширная литература, см. [5] и приведенную там библиографию.

A. Figà-Talamanca [6] доказал, что пространство M_r является сопряженным для конкретного функционального пространства A_r. Автор в нескольких работах, посвященных задаче Стечкина, использовал функциональное пространство F_r, которое описано в других терминах в сравнении с A_r, однако, как показано в [5], эти два пространства совпадают.

Как оказалось [1, § 6; 2], величина (2) выражается равенством, аналогичным (4), через наименьшую константу $K_{n,k}(r)$ в неравенстве

$$\|f^{(k)}\|_C \le K_{n,k}(r) \|f\|_{F_r}^{(n-k)/n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty}^{k/n}, \quad f \in W^n_{\infty,\infty},$$

подобном неравенству (3). Именно эти соображения приводят к первому неравенству в (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

[2] *Арестов В. В.* Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 34–56.

[3] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

[4] *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избранные тр. Математика, механика. М. : Наука, 1985. С. 252–263.

[5] *Арестов В. В.* О сопряженности пространства мультипликаторов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–15.

[6] *Figà-Talamanca A.* Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.