УДК 517.518

КОНЕЧНЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Ю. А. Фарков (Москва, Россия)[1]
farkov-ya@ranepa.ru

Обсуждаются методы построения конечных жёстких фреймов с помощью функций Уолша. В связи с проблемой Кадисона-Зингера рассмотрен метод расщепления конечных фреймов Парсеваля, определяемых по матрицам Уолша. Показано, как применить дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона и принцип расширения для построения фреймов Парсеваля периодических последовательностей.

Ключевые слова: всплески, жёсткие фреймы, функции Уолша, проблема Кадисона–Зингера, дискретное преобразование Виленкина-Крестенсона, периодические последовательности.

FINITE TIGHT FRAMES IN WALSH ANALYSIS

Yu. A. Farkov (Moscow, Russia)
farkov-ya@ranepa.ru

Methods for constructing finite tight frames using Walsh functions are discussed. In connection with the Kadison-Singer problem, the method of splitting finite Parseval frames defined by Walsh matrices is considered. It is shown how to apply the discrete Vilenkin-Chrestenson transform and the extension principle to construct Parseval frames of periodic sequences.

Keywords: wavelets, tight frames, Walsh functions, Vilenkin groups, Kadison-Singer problem, discrete Vilenkin-Chrestenson transform, periodic sequences.

Пусть H — гильбертово пространство. Система элементов f_1,f_2, f_3,... называется *фреймом* для H, если существуют такие положительные постоянные A и B, что для любого элемента $f \in H$ верны неравенства

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Постоянные A и B называют соответсвенно *нижней* и *верхней границами* фрейма. Если границы фрейма совпадают, то фрейм называют *жёстким* (*tight*). В случае $A = B = 1$ фрейм $\{f_n\}$ называется *фреймом Парсеваля.*

Основы теории фреймов изложены в монографиях [1, 2], где имеется подробная библиография. Теория конечных жёстких фреймов [3] активно развивалась последние пятнадцать лет в связи с приложениями в таких областях как обработка сигналов, квантовая теория информации, многомерные ортогональные полиномы и сплайны, а также в теории сжатых измерений (Compressed Sensing). Взаимосвязи между теорией фреймов и анализом Уолша в контексте конструкций всплесков (wavelets) анализировались в недавних статьях [4–7].

---

[1]Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Хорошо известно, что функции Уолша можно интерпретировать как характеры двоичной группы Кантора, а обобщениями функций Уолша являются характеры групп Виленкина (см., например, [8–10]). Основные результаты о всплесках на группах Кантора и Виленкина приведены в книге [11] и в обзорных статьях [12, 13]. В лекции будут изложены методы построения конечных жёстких фреймов с помощью функций Уолша и их обобщений. В связи с проблемой Кадисона–Зингера (см., например, [14–16]) будет рассмотрен предложенный в [17] метод расщепления конечных фреймов Парсеваля, определяемых по матрицам Уолша. Ниже формулируется один из недавних результатов о построении фреймов в пространствах периодических последовательностей.

Пусть $N = p^n$, где p и n — натуральные числа, $p \geq 2$. Множество $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ является абелевой группой с операцией

$$a \oplus b := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu - b_\nu|\, p^{\nu}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^{\nu}, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu p^{\nu}, \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Пространство $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ состоит из последовательностей вида

$$x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots), \quad x(j) \in \mathbb{C},$$

таких, что $x(j+N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Последовательность x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ часто отождествляется с вектором

$$(x(0), x(1), \ldots, x(N-1)).$$

Линейные операции в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяются покомпонентно. Скалярное произведение последовательностей $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. *Функции Крестенсона* $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$ для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ могут быть заданы равенствами

$$w_k^{(N)}(l) = \varepsilon_p^{\sigma(k,l)}, \quad w_k^{(N)}(j) = w_k^{(N)}(j+N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где

$$\sigma(k,l)=\sum_{\nu=0}^{n-1}k_\nu l_{n-\nu-1}$$

и

$$k=\sum_{\nu=0}^{n-1}k_\nu p^\nu,\quad l=\sum_{\nu=0}^{n-1}l_\nu p^\nu,\quad k_\nu,l_\nu\in\{0,1,\ldots,p-1\}.$$

В случае $p=2$ функции Крестенсона совпадают с функциями Уолша (см., например, [9, 18, 19]).

Положим $N_1=p^{n-1}$. При $p=2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ следует каждую строку матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ написать дважды в виде двух новых строк и дополнить полученные строки, приписывая к первой строке справа еще один экземпляр этой же строки, а ко второй строке добавляя справа все элементы той же строки с противоположным знаком (см. [9, § 1.3]). Аналогично, при $p>2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ каждая строка матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ записывается p раз в один столбец и умножается последовательно на 1, ε_p, ε_p^2, …, ε_p^{p-1} (полученные после умножения строки приписываются справа к имеющимся строкам). При $p=3$ из матрицы

$$(w_k^{(3)}(l))=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{bmatrix},\qquad k,l\in\{0,1,2\}.$$

этим методом получается (для краткости полагаем $\varepsilon=\varepsilon_3$) следующая матрица:

$$(w_k^{(9)}(l))=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon^2\\1&1&1&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon\\1&\varepsilon&\varepsilon^2&1&\varepsilon&\varepsilon^2&1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&\varepsilon&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^2&1&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon^2&1\\1&\varepsilon^2&\varepsilon&1&\varepsilon^2&\varepsilon&1&\varepsilon^2&\varepsilon\\1&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon&1&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon&1\\1&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon&1&\varepsilon&1&\varepsilon^2\end{bmatrix},\qquad k,l\in\{0,1,\ldots,7\}.$$

Матрица $W^{(N)}:=(w_l^{(N)}(j))_{l,j=0}^{N-1}$ симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_l^{(N)}(j)\overline{w_k^{(N)}(j)} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^{(N)}(l)\overline{w_i^{(N)}(k)} = N\delta_{l,k}, \quad l,k \in \mathbb{Z}_N,$$

где $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера. Следовательно, система $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}\}$ является ортогональным базисом пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона сопоставляет каждому вектору x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ последовательность $\widehat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}\}$:

$$\widehat{x}(k) := N^{-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{w_k^{(N)}(j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Разложение вектора x по базису $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}\}$ записывается в виде $x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j)$, $j \in \mathbb{Z}_N$.

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор p-ичного сдвига $T_k : \ell^2(\mathbb{Z}^N) \to \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \ominus k), \quad x = x(j) \in \ell^2(\mathbb{Z}^N).$$

Для любых $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$, $k, l \in \mathbb{Z}_N$, справедливы равенства

$$\widehat{(T_k x)}(l) = \overline{w_k^{(N)}(l)}\,\widehat{x}(l), \quad \langle x, y\rangle = N\langle\,\widehat{x}, \widehat{y}\,\rangle.$$

При построении жёстких фреймов и ортогональных базисов всплесков в различных пространствах ключевую роль играет принцип расширения (см., например, [1, § 1.8]). Следующая теорема и приведенный ниже алгоритм показывают, как реализуется принцип расширения в рассматриваемой ситуации.

Теорема A [7]. *Пусть векторы $u_0, u_1, \ldots, u_r \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ таковы, что для матрицы*

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \ldots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+N_1) \\ \widehat{u}_0(l+2N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+2N_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+(p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ *выполнено равенство*

$$M(l)M^*(l) = I_p, \tag{1}$$

где I_p *— единичная матрица порядка* p. *Тогда система*

$$B(u_0, u_1, \ldots, u_r) := \{T_{p\,k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p\,k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \cdots \cup \{T_{p\,k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

При условии (1) матрицу $M(l)$ можно дополнить до унитарной матрицы. Поэтому верны неравенства

$$|\widehat{u}_s(l)|^2 + |\widehat{u}_s(l + N_1)|^2 + \cdots + |\widehat{u}_s(l + (p-1)N_1)|^2 \leq \frac{p}{N^2}, \tag{2}$$

где $s = 0, 1, \ldots, r$, $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$. Для случая, когда все неравенства в (2) обращаются в равенства, теорема A при $r = p - 1$ приводит к ортонормированному базису $B(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$, построенному в [19]. Отметим также, что при $p = 2$ матрица $W^{(N)}$ совпадает с матрицей Уолша и для этого случая теорема A доказана в [20].

Пример 1. Пусть $p = r = 2$, $n = 1$. Тогда

$$M(l) = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l) \\ \widehat{u}_0(l+1) & \widehat{u}_1(l+1) & \widehat{u}_2(l+1) \end{bmatrix}, \quad l = 0.$$

Условие (1) будет выполнено, если

$$\widehat{u}_i(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_i, \quad \widehat{u}_i(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, y_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где (x_0, x_1, x_2) и (y_0, y_1, y_2) – ортогональные векторы единичной длины:

$$x_0 \bar{y}_0 + x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 = 0,$$

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, \quad |y_0|^2 + |y_1|^2 + |y_2|^2 = 1.$$

В частности, если $x_0 = a$, $y_0 = b$, $|a|^2 + |b|^2 \leq 1$, то можно выбрать

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{1 - |a|^2},$$

$$y_2 = -\frac{a\bar{b}}{\sqrt{1 - |a|^2}}, \quad y_1 = \sqrt{1 - |b|^2 - |y_2|^2}.$$

Таким образом, для каждой пары (a, b) комплексных чисел, удовлетворяющих условию $0 < |a|^2 + |b|^2 \leq 1$, получается фрейм Парсеваля $\{u_0, u_1, u_2\}$ для $\ell^2(\mathbb{Z}_2)$ (сравните с примером 2 в [20]).

Пример 2. Пусть $p = r = n = 2$. Выберем u_0, u_1, u_2 в $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$ такими, что

$$\sum_{s=0}^{2} \widehat{u}_s(l)\overline{\widehat{u}_s(l+2)} = 0, \quad \sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s(l)|^2 = \sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s(l+2)|^2 = \frac{1}{8}, \quad l = 0, 1.$$

Тогда $\{u_0, u_1, u_2, T_2u_0, T_2u_1, T_2u_2\}$ является фреймом Парсеваля для $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$. Действительно, в этом случае

$$M(l) = \frac{4}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l) \\ \widehat{u}_0(l+2) & \widehat{u}_1(l+2) & \widehat{u}_2(l+2) \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1,$$

и равенство (1) выполнено.

Пример 3. Пусть $p = 3$, $n = 2$, $r = 8$. Тогда

$$M(l) = \frac{9}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_0(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+3) & \widehat{u}_0(l+3) & \dots & \widehat{u}_r(l+3) \\ \widehat{u}_0(l+6) & \widehat{u}_0(l+6) & \dots & \widehat{u}_r(l+6) \end{bmatrix}, \qquad l = 0, 1, 2,$$

и для выполнения условия $M(l)M^*(l) = I_3$ матрицы $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$ можно выбрать так, чтобы составленная из них матрица $(\widehat{u}_k(j))_{k,j=0}^{j}$ была пропорциональна матрице $(w_k^{(9)}(j))_{k,j=0}^{8}$. Таким образом, в рассматриваемом случае матрица $M(l)$ формируется по строкам матрицы $W^{(9)}$.

Предположим, что числа $b_0, b_1, \dots, b_{N-1}$ удовлетворяют условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 \le \frac{p}{N^2}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1. \tag{3}$$

Алгоритм B.

Шаг 1. Найти вектор $u_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ такой, что для $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$

$$\widehat{u}_0(l) = b_l, \quad \widehat{u}_0(l+N_1) = b_{l+N_1}, \dots, \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) = b_{l+(p-1)N_1},$$

где числа $b_0, b_1, \dots, b_{N-1}$ берутся из (3).

Шаг 2. Для полученного на шаге 1 вектора u_0 найти векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$, такие, что для матрицы

$$M(l) = \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+N_1) \\ \widehat{u}_0(l+2N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+2N_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+(p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ выполнено равенство $M(l)M^*(l) = I_p$.

Шаг 3. Определить систему $B(u_0, u_1, \ldots, u_r)$ по формуле

$$B(u_0, u_1, \ldots, u_r) = \{T_{p\,k}u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p\,k}u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \cdots \cup \{T_{p\,k}u_r\}_{k=0}^{N_1-1}.$$

Отметим, что шаг 1 алгоритма B реализуется с помощью обратного дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона:

$$u_0(j) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k w_k^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_N,$$

а для реализации шага 2 можно использовать те же методы, что и при построении фреймов на группах Виленкина (см. [4]).

На практике вектор $(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ в алгоритме B может быть выбран по энтропийному, среднеквадратическому или иному критерию адаптациии применяемого метода аппроксимации к сигналу (см. [22, § 9.4] и примеры в [13, 23]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.

[2] *Christensen O.* An Inroduction to Frames and Riesz Bases. Boston : Birkhäuser, 2016. 704 p.

[3] *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames N. Y. : Birkhauser, 2018. 587 p. (Applied and Numerical Harmonic Analysis)

[4] *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 pages).

[5] *Фарков Ю. А.* Параметрические множества для фреймов в анализе Уолша // Вестн. Евразийского нац. ун-та им. Л.?Н. Гумилева. Сер. Матем. Информ. Мех. 2018. Т. 124. № 3. С. 89–94.

[6] *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions // European Journal of Mathematics. 2019. Vol. 5, № 1. P. 250–267.

[7] *Farkov Yu. A.* Wavelet tight frames in Walsh analysis // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 2019. Vol. 49. P. 161–177.

[8] *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. N. Y. : Adam Hilger, 1990. 545 p.

[9] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 352 с.

[10] *Stanković R.S., Butzer P. L., Schipp F., Wade W. R. (eds.)* Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. Vol. 2. Extensions and generalizations // Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science 13. Amsterdam : Atlantis Press, 2015. 360 p.

[11] *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of wavelets through Walsh functions. Singapore : Springer, 2019. 382 p. (Industrial and Applied Mathematics).

[12] *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески в анализе Уолша // Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ / под ред. Т. П. Лукашенко и А. П. Солодова. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. С. 6275.

[13] *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлет-преобразования в анализе Уолша // International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17 : материалы международ. конф. Санкт-Петербургский политехн. ун-т, 24–28 июля 2017 г. / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. М. : ВИНИТИ РАН, 2019. Т. 160. С. 126–136

[14] *Casazza P. G.,Tremain J. C.* The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2006. Vol. 103, № 7. P. 2032–2039.

[15] *Stevens M.* The Kadison-Singer Property. Berlin : Springer, 2016. 140 p. (SpringerBriefs in Mathematical Physics 14).

[16] *Bownik M.* The Kadison-Singer problem // Kim, Yeonhyang (ed.) et al., Frames and harmonic analysis. AMS special session on frames, wavelets and Gabor systems and special session on frames, harmonic analysis, and operator theory, North Dakota State University, Fargo, ND, USA, April 16–17, 2016. Proceedings. Providence, RI : American Mathematical Society, Contemporary Mathematics 706. 2018. P. 63–92.

[17] *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Optimal splitting of Parseval frames using Walsh matrices // Poincare J. Anal. Appl. Special Issue (IWWFA-III, Delhi). 2018. № 2. P. 39–58.

[18] *Беспалов М. С.* Дискретное преобразование Крестенсона // Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46, № 4. С. 91–115.

[19] *Малоземов В. Н. Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.

[20] *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, вып. 6. С. 914–928.

[21] *Фарков Ю. А., Робакидзе М. Г.* Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 3. С. 457–469.

[22] *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. М. : Мир, 2005. 671 с.

[23] *Любушин А. А., Фарков Ю. А.* Синхронные компоненты финансовых временных рядов // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 4. С. 639–655.