УДК 517.98, 517.51

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СДВИГОВ ПОЛИНОМА В ПРОСТРАНСТВЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. В. Фадеева (Москва, Россия)
annafadeeva16@mail.ru

В работе доказан критерий существования фрейма Парсеваля наперед заданной размерности, полученного последовательными сдвигами одного многочлена, установлено, какое количество элементов может быть у фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов одного многочлена в пространстве тригонометрических многочленов вида $T_Q(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, где $c_k \in \mathbb{C}$, а Q — конечное множество целых чисел. Также показано, каким должен быть вид фрейма из сдвигов одной функции. Полученный результат обобщен на случай нескольких переменных.

Ключевые слова: фрейм Парсеваля, сдвиги функции, пространство тригонометрических многочленов.

THE PARSEVAL'S FRAMES OF SUCCESSIVE SHIFTS OF A POLYNOMIAL IN SPACE OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

A. V. Fadeeva (Moscow, Russia)
annafadeeva16@mail.ru

The work establishes the possible dimensions of the Parseval's frame in the space of trigonometric polynomials of the following type $T_Q(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, which consists of serial translations of a polynomial ($c_k \in \mathbb{C}$, the finite set $Q \subset \mathbb{Z}$). The sufficient and necessary conditions for a system of the serial translations to be a Parseval's frame are also established there. The result obtained is generalized to the case of several variables.

Keywords: Parseval's frame, shifts of functions, space of trigonometric polynomials.

Пусть Q — непустое конечное подмножество целых чисел, а M — непустое конечное подмножество неотрицательных целых чисел.

Введем следующие обозначения:

1) $\mathbb{T}_Q$ — пространство комплексных тригонометрических многочленов вида $T_Q(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, где $c_k \in \mathbb{C}$;

2) $\mathcal{T}_M$ — пространство действительных тригонометрических многочленов, т.е. многочленов вида $T_M(x) = \sum\limits_{|k|\in M} c_k e^{ikx}$, где коэффициенты $c_0 = \frac{a_0}{2}\chi_M(0), c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, $0 < k \in M$.

В 2014 г. Т.П. Лукашенко показал [1, 2], что в пространствах $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$ с $Q = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ и $M = [0, n] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, существуют ортонормированные базисы из последовательных сдвигов одного многочлена, а в пространствах $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$ с $Q = ([-n, -m] \cup [m, n]) \cap \mathbb{Z}$ и $M = [m, n] \cap \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$ (и в некоторых других), таких ортонормированных базисов нет. Но в этих пространствах существуют фреймы Парсеваля из $(2n+1)$ последовательного сдвига одного многочлена, а именно система сдвигов проекций ядер Дирихле

$$\Big\{T_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sum_{k\in Q} e^{i\left(k\left(x-\frac{2\pi r}{2n+1}j\right)-s_k\right)}\Big\}_{j=0}^{2n},$$

где $s_k \in \mathbb{R}$, число $r \in \mathbb{Z}$ не имеет общих делителей с числом $2n+1$ (в случае пространства действительных тригонометрических многочленов $s_0 \in \{0, \pi\},\ s_k = -s_{-k}$). При больших значениях n размерность фрейма Парсеваля может во много раз превосходить размерность пространства многочленов, равную $2(n-m+1)$. В связи с этим возник вопрос о существовании в таких пространствах $\mathbb{T}_Q$ фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции из меньшего числа элементов. Оказывается, что в некоторых случаях такие фреймы Парсеваля есть.

В 2018 году Фадеева А.В. [5] установила для пространств $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$, какое количество элементов может быть у фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов одного многочлена и каким должен быть вид фрейма из сдвигов одной функции.

В данной работе мы рассмотрим некоторые результаты для случая одной переменной и ряд результатов для случая нескольких переменных: необходимые и достаточные условия для системы из сдвигов функции являться фреймом Парсеваля в пространстве тригонометрических многочленов от нескольких переменных.

С общим определением фреймов можно ознакомиться в [3; 4]. Дадим определения для частного случая — фреймов Парсеваля (или ортоподобных систем).

Определение 1. Система $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ элементов гильбертова пространства H называется *фреймом Парсеваля* (ортоподобной системой), если для любого элемента $f \in H$ выполнено равенство $\|f\|^2 = \sum\limits_k |(f, f_k)|^2$ или, что эквивалентно, выполнено равенство $f = \sum\limits_k (f, f_k) f_k$, где ряд сходится в H (см. [3, с. 96, ф-ла (3.2.2); 4, с. 74, ф-ла (1.113)]).

Рассмотрим задачу о существовании и виде фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции в пространствах $\mathbb{T}_Q$, где множество $Q \subset \mathbb{Z}, |Q| < \infty$.

Теорема 1. *Пусть многочлен* $T(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, *где* Q *— множество целых чисел, для количества элементов которого имеет место оценка* $1 < |Q| < \infty$, *и пусть* r *— натуральное число. Система* $\{T(x-\alpha j)\}_{j=0}^{r}$, *полученная последовательными сдвигами многочлена* $T(x)$ *на* α, *обра-*

зует фрейм Парсеваля в пространстве $\mathbb{T}_Q$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\alpha = \frac{2\pi v}{\mu\cdot(r+1)}$, *$\mu$ — НОД (наибольший общий делитель) чисел из множества* $\{a-b:\ a,b\in Q,\ a\neq b\}$, $v\in\mathbb{Z}$;

2) $|c_k| = \frac{1}{\sqrt{2\pi(r+1)}}$, $k\in Q$;

3) *для любых $a,b\in Q$, $a\neq b$, выполнено соотношение* $(a-b)\cdot\alpha\neq 0 \pmod{2\pi}$.

С доказательством данной теоремы можно ознакомиться в [5]. Также в упомянутой работе [5] был получен критерий существования фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов многочлена в пространстве действительных тригонометрических многочленов.

Рассмотрим задачу о существовании и виде фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов функции в пространствах тригонометрических многочленов от нескольких переменных.

Пусть непустое конечное множество $Q\subset\mathbb{Z}^n, n\in\mathbb{N}$, а $\mathbb{T}_Q$ — пространство комплексных тригонометрических многочленов вида: $T_Q(x_1,...,x_n) = $
$= \sum\limits_{(k_1,...,k_n)\in Q} c_{k_1,...,k_n}e^{i(k_1x_1+...+k_n)}$ или $T_Q(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{\overrightarrow{k}\in Q} c_{\overrightarrow{k}}e^{i(k_1x_1+...+k_n)}$, где $c_{\overrightarrow{k}}\in\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть многочлен $T(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{\overrightarrow{k}\in Q} c_{\overrightarrow{k}}e^{i(k_1x_1+...+k_nx_n)}$, где Q — непустое конечное подмножество $Q\subset\mathbb{Z}^n$. Пусть J – непустое конечное множество сдвигов (множество J состоит из элементов вида $(j_1,...,j_n)$, где $j_1,...,j_n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$). Если система $\{T(x_1-\alpha_1j_1,...,x_n-\alpha_nj_n)\}_{(j_1,...,j_n)\in J}$ образует фрейм Парсеваля в пространстве $\mathbb{T}_Q$, то выполнено следующее условие:*

$|c_{(k_1,...,k_n)}| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|J|}}$, *для любых* $(k_1,...,k_n)\in Q$.

Заметим, что система сдвигов многочлена вдоль ненулевого вектора $(a_1,...,a_n)$ $(a_i\in\mathbb{R})$, т.е. когда $J = \{j\times(a_1,...,a_n)\}_{j=0}^{|J|-1}$, на аргумент $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ сводится к случаю сдвигов вдоль вектора $\underbrace{(1,...,1)}_{n}$ путем изменения аргумента $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ на $(a_1\alpha_1,...,a_n\alpha_n)$, то есть система сдвигов $\{T(x_1-\alpha_1a_1j,...,x_n-\alpha_na_nj)\}_{j=0}^{|J|-1}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{T}_Q$ тогда и только тогда, когда система $\{T(x_1-\widetilde{\alpha}_1j,...,x_n-\widetilde{\alpha}_nj)\}_{j=0}^{|J|-1}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{T}_Q$, где $\widetilde{\alpha}_k = \alpha_ka_k, k\in\{1,...,n\}$. Таким образом, достаточно рассматривать систему сдвигов вида $J = \{j\times(1,...,1)\}_{j=0}^{|J|-1}$, где $|J|$ — натуральное число.

Теорема 3. *Пусть многочлен* $T(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{\overrightarrow{k} \in Q} c_{\overrightarrow{k}} e^{i(k_1 x_1 + ... + k_n x_n)}$, *где* $Q \subset \mathbb{Z}^n$ *— непустое конечное множество, причем существует такие элементы* $(a_1^1, ..., a_n^1)$,..., $(a_1^n, ..., a_n^n) \in Q : (a_1^1 + 1, a_2^1, ..., a_n^1), ..., (a_1^n, ..., a_n^n + 1) \in Q$. *Пусть множество* $J = \{j \times (1, ..., 1)\}_{j=0}^{|J|-1}$, *где* $|J|$ *— натуральное число. Система* $\{T(x_1 - \alpha_1 j_1, ..., x_n - \alpha_n j_n)\}_{(j_1, ..., j_n) \in J}$, *полученная последовательными сдвигами многочлена*
$T(x_1, ..., x_n)$ *на* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, *образует фрейм Парсеваля в пространстве* $\mathbb{T}_Q$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\alpha_l = \frac{2\pi k_l}{|J|}, k_l \in \mathbb{Z}, l \in \{1, 2, ..., n\}$;

2) $|c_{(k_1, ..., k_n)}| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |J|}}$, $(k_1, ..., k_n) \in Q$;

3) *для любых* $(l_1, ..., l_n), (m_1, ..., m_n) \in Q$, $(l_1, ..., l_n) \neq (m_1, ..., m_n)$, *выполнено соотношение:*
$\Big((l_1, ..., l_n) - (m_1, ..., m_n)\Big) \cdot (\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Условие 3 предыдущей теоремы накладывает условия на углы $\alpha_i, i \in \{1, ..., n\}$. В случае двух переменных из этой теоремы вытекает следующее ограничение:

Предложение 1. *Рассмотрим пространство* $\mathbb{T}_Q$, *где* Q_1, Q_2 *— множество целых чисел, для количества элементов которого имеет место оценка* $1 < |Q_i| < \infty$, *и* Q_1, Q_2 *содержит три последовательных числа;* $J-$ *конечное множество* $J = j \times (1, 1)_{j=0}^{|J|-1}$. *Обозначим через* $D_i = \{a_i - b_i : a_i, b_i \in Q_i, a_i \neq b_i\}$, *а через* $\widetilde{D_i} = \{\frac{2\pi d}{|J|} + 2\pi k |J| : d \in D_i, k \in \mathbb{Z}\}$, i *= 1, 2. Если система* $\{T(x_1 - \alpha_1 j_1, x_2 - \alpha_2 j_2)\}_{(j_1, j_2) \in J}$, *полученная последовательными сдвигами вида многочлена* $T(x)$ *на* (α_1, α_2), *образует фрейм Парсеваля в пространстве* $\mathbb{T}_Q$, *то углы* α_1 *и* α_2 *не могут одновременно принадлежать множествам* $\widetilde{D_2}, \widetilde{D_1}$ *соответственно.*

Теорема 4. *Пусть многочлен* $T(x_1, ...x_n) = \sum\limits_{\overrightarrow{k} \in Q} c_{\overrightarrow{k}} e^{i(k_1 x_1 + ... k_n x_n)}$, *где* Q_j *— множество целых чисел, для количества элементов которого имеется оценка* $1 < |Q_j| < \infty, j \in \{1, 2, ...n\}$. *Пусть множества* Q_j *содержат по два последовательных числа,* $Q = Q_1 \times ... \times Q_n$, *и множество* $J = \prod\limits_{j=1}^{n} J_j$, *где* $J_j = \{0, 1, 2, ...n_j\}, n_j \in \mathbb{N}, j \in \{1, 2, ...n\}$. *Система* $\{T(x_1 - \alpha_1 j_1, ...x_n - \alpha_n j_n)\}_{(j_1, ...j_n) \in J}$, *полученная последовательными сдвигами многочлена* $T(x_1, ..., x_n)$ *на* $(\alpha_1, ...\alpha_n)$, *образует фрейм Парсеваля в пространстве* $\mathbb{T}_Q$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\alpha_j = \frac{2\pi k_j}{|J_j|}, k_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, 2, ...n\}$;
2) $|c_{\overrightarrow{k}}| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |J|}}, \ \overrightarrow{k} \in Q$;
3) *для любых* $a_j, b_j \in Q_j$, $a_j \neq b_j$, *выполнено соотношение:*
$(a_j - b_j) \cdot \alpha_j \neq 0 \pmod{2\pi}$ *для* $j \in \{1, 2, ...n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Базисы тригонометрических многочленов из сдвигов ядер Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 5. С. 35–40.

[2] *Лукашенко Т. П.* Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 367–373.

[3] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ РХД, 2001. С. 96–105

[4] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. С. 73–84

[5] *Фадеева А.В.* Фреймы Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции в пространствах тригонометрических многочленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 6. С. 30–36.