УДК 517.518.85, 517.518.68

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЁННЫХ СИНК ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Трынин, Е. Д. Киреева, М. А. Олейник
(Саратов, Россия)
tayu@rambler.ru, ekateriha98@mail.ru, oleynik-ritochka@mail.ru

На классе непрерывных функций ограниченной вариации изучены аппроксимативные свойства интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши с потенциалом ограниченной вариации. Рассмотрена модификация таких интерполяционных процессов Лагранжа, позволяющая приближать любую непрерывную функцию ограниченной вариации на всём отрезке $[0, \pi]$.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, теорема отсчётов, ограниченная вариация.

A CRITERION FOR THE CONVERGENCE OF GENERALIZED SINC APPROXIMATIONS FOR FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

A. Yu. Trynin, E. D. Kireeva, M. A. Oleynik
(Saratov, Russia)
tayu@rambler.ru, ekateriha98@mail.ru, oleynik-ritochka@mail.ru

Approximative properties of Lagrange interpolation processes constructed by solutions of Cauchy problem with potential of bounded variation are studied on the class of continuous functions of limited variation. A modification of such Lagrange interpolation processes is considered, which allows to approximate any continuous function of bounded variation over the entire interval $[0, \pi]$.

Keywords: sinc approximation, sampling theorem, bounded variation.

Договоримся считать, что $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda})$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbf{R}$, и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \tag{1}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \tag{2}$$

перенумеруем следующим образом

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n,\lambda} \leq \pi.$$

В сообщении речь пойдёт об аппроксимативных свойствах значений операторов (см., например, [1,2]), построенных по решениям задачи Коши (1) или (2) вида:

$$S_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})}f(x_{k,\lambda})=\sum_{k=0}^{n}s_{k,\lambda}(x)f(x_{k,\lambda}),\tag{3}$$

$$T_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}[f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)]+$$
$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).\tag{4}$$

Операторы (3), (4) обладают интерполяционным свойством Лагранжа, т.е. $S_\lambda(f,x_{k,\lambda})=T_\lambda(f,x_{k,\lambda})=f(x_{k,\lambda})$, для любых $0\le k\le n$, $n\in\mathbb{N}$.

Г. И. Натансон в [3] получил признак Дини–Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$ процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k,n})\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k,n})l_{k,n}^{SL}(x),\tag{5}$$

где U_n есть $n-$ая собственная функция регулярной задачи Штурма–Лиувилля

$$U''+[\lambda-q]U=0,\quad U'(0)-hU(0)=0,\quad U'(\pi)+HU(\pi)=0$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и граничными условиями $h\neq\pm\infty,\quad H\neq\pm\infty$. Здесь через $0<x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{n,n}<\pi$ обозначены нули функции U_n.

Изучению аппроксимативных свойств операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля (5) посвящены также работы [4–8]. Заметим, что (5) являются частным случаем операторов (3), в случае задачи Коши (1). Свойства операторов интерполирования функций (3), (4) и (5) тесно связанны с поведением синк-приближений

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin{(nx-k\pi)}}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

также представляющих собой частный случай операторов (3), только теперь в случае задачи Коши (2). До появления работ [9–18] приближение такими операторами на отрезке, или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. Здесь приводятся полученные с помощью концепций работ [19–28] достаточные условия равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ и равномерной на отрезке $[0, \pi]$ сходимости интерполяционных процессов (3),(4). Будем обозначать $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C_0[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно на всём отрезке $[0, \pi]$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |S_\lambda(f, x) - f(x)| = 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно внутри отрезка $[0, \pi]$ (раномерно на шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и любом компакте, содержащемся в интервале $(0, \pi)$) справедливо соотношение* (6).

Предложение 1. *Если функция $f \in C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию, то существует задача Коши вида* (2) *такая, что сходимость в соотношении* (6) *на всём отрезке $[0, \pi]$, оставаясь квазиравномерной, равномерной не будет.*

Теорема 3. *Пусть функция $f \in C[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно на всём отрезке $[0, \pi]$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |T_\lambda(f, x) - f(x)| = 0. \tag{7}$$

Замечание. Проведены численные эксперименты [28], в которых построены непрерывные функции, для которых погрешность аппроксимации в соотношениях (6) и (7) неограниченно растёт с ростом вариации приближаемой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108.

[2] *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 6. С. 129–162.

[3] *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учен. записки Ленинград. пед. ин-та. 1958. Т. 166, No. 1. С. 213–219.

[4] *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2010. № 11. С. 74–85.

[5] *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2000. Т. 9, № 460. С. 60–73.

[6] *Трынин А. Ю.* Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. 479 с.

[7] *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 133–143.

[8] *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 116–129.

[9] *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6 (324). С. 53–128.

[10] *Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 10. С. 141–158.

[11] *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6, С. 66–78.

[12] *Трынин А. Ю.* Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 3. С. 288–298.

[13] *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East Journal on Approximations. 2008. Т. 14, № 2. P. 183–192.

[14] *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 4. С. 232–256.

[15] *Умаханов А. Я., Шарапудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавк. матем. журн. 2016. Т. 18, № 4. С. 61–70.

[16] *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 116–132.

[17] *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 5. С. 170–194.

[18] *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Матем. 2016. № 3. С. 72–81.

[19] *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 506–514.

[20] *Дьяченко М. И.* Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 3. С. 3–18

[21] *Скопина М. А., Максименко И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2013. Т. 15, № 2. С. 1–39.

[22] *Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 2004. Т. 76 № 5. С. 723–731.

[23] *Борисов Д. И., Знойил М.* О собственных значениях PTPT-симметричного оператора в тонком слое // Матем. сб. 2017.Т. 208, № 2. С. 3–30.

[24] *Фарков Ю. А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 5. С. 185–212.

[25] *Киреева Е. Д., Трынин А. Ю.* Об аппроксимативных свойствах полиномиальных систем Чебышёва $\{S_{k,\lambda}\}_{k=0}^{n}$ // АННИ XXI века: теория и практика. Воронеж, 2019. С. 166–170.

[26] *Киреева Е. Д., Трынин А. Ю.* Об одном достаточном условии равномерной сходимости синк-аппроксимаций // 21 centry: fundamental science and technology XVII. North Charleston, USA, 2018. Vol. 2. P. 109–112.

[27] *Трынин А. Ю., Киреева Е. Д., Хуторная Ю. С.* Признак равномерной сходимости синк-аппроксимаций на отрезке // АННИ XXI века: теория и практика. Воронеж, 2017. С. 534–536.

[28] *Олейник М. А., Трынин А. Ю.* Исследование погрешности в районе заданного узла классических и модифицированных операторов sinc-аппроксимаций непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции // MODERN SCIENCE. 2019. № 4–1. С. 313–317.