УДК 517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ МОДУЛЯ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА: НОВЫЕ ПРОДВИЖЕНИЯ И ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков
(Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Недавно замечено, что в теории классических полиномов Бернштейна особую роль играет пример простого симметричного модуля. Он служит надежным ориентиром для распространения результатов на более сложные кусочно линейные порождающие функции. В работе отражено текущее состояние вопроса. Кратко сформулировано основное утверждение о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Особо отмечены оценки уклонения на основном отрезке $[0,1]$, где разбираемый пример позволяет добиться почти предельной точности. Даны указания по поводу возможных обобщений, в том числе, на порождающие функции, имеющие в своем составе линейный кусок.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный модуль, оценки уклонения, кусочно линейные функции.

APPROXIMATION OF THE MODULE FUNCTION WITH BERNSTEIN POLYNOMIALS: NEW ADVANCES AND POSSIBLE GENERALIZATIONS[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

It was recently noticed that in the theory of classical Bernstein polynomials an example of the simple module function plays a special role. It provides a guideline for the expansion of results for the more complicated case of piecewise linear generating functions. The paper reflects current state of the problem. The main statement on the convergence of Bernstein polynomials in the complex plane is briefly formulated. Convergence estimates on the main interval are specially noted where the example under consideration allows to obtain practically ideal accuracy. Ways of further generalizations are outlined, including generating functions which have a linear part in the structure.

Keywords: Bernstein polynomials, simple module function, convergence estimates, piecewise linear functions.

Для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна переменной $z \in \mathbb{C}$ вводят формулой

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна см. в [1–3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-01-00236).

В последнее время (см. [4, 5]) особый интерес вызывает пример простого симметричного на отрезке $[0,1]$ модуля

$$f(x) = |2x-1|, \qquad x \in [0,1]. \tag{2}$$

Полиномы Бернштейна для функции (2) имеют вид

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{2k}{n} - 1\right| C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Действующее в последовательности (3) *свойство склеивания*

$$B_{2m+1}(f,z) = B_{2m}(f,z), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

позволяет ограничиться номерами $n = 2m$ и рассматривать далее лишь полиномы

$$B_{2m}(f,z) = \sum_{k=0}^{2m} \left|\frac{k}{m} - 1\right| C_{2m}^k \, z^k (1-z)^{2m-k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Для них справедливо *разложение Поповичу*

$$B_{2m}(f,z) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \, 2^{-2k} \, C_{2k}^k \, \left(4z(1-z)\right)^k, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

восходящее к классической работе [6]. Подробный разбор свойств (4), (6) и многих других соотношений, связанных с полиномами (5), см. в [4, 5].

Дальнейшая замена $\zeta = 4z(1-z)$ позволяет связать конструкцию (6) с частичными суммами степенного ряда

$$\sqrt{1-\zeta} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \, 2^{-2k} \, C_{2k}^k \, \zeta^k, \qquad |\zeta| \leqslant 1, \tag{7}$$

сходящегося в круге к главной ветви корня. Эта неожиданная связь существенно упрощает изучение полиномов (5) и придает новый импульс теории степенных рядов (см., в частности, работу [7], результаты которой получены именно в связи с разложением (6)).

Соотнося (6) и (7), видим, что последовательность (5) сходится на множестве

$$K_{1/2} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |4z(1-z)| \leqslant 1 \right\}, \tag{8}$$

ограниченном лемнискатой

$$\Lambda_{1/2} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |4z(1-z)| = 1 \right\}, \tag{9}$$

и расходится всюду вне $K_{1/2}$. С общей точки зрения работы [8] указанные объекты порождены точкой излома $x = 1/2$ функции (2).

Фактически, в нашем примере (2) разложение Поповичу (6) делает предельно ясной подоплеку знаменитых результатов Канторовича [8] о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области. Отдавая должное автору [8], называем множество (8) *компактом Канторовича* для функции (2), а его границу (9) — соответственно *лемнискатой Канторовича.* Компакт состоит из двух петель

$$K^{(1)}_{1/2} \equiv K_{1/2} \cap \{\operatorname{Re} z \leqslant 1/2\}, \qquad K^{(2)}_{1/2} \equiv K_{1/2} \cap \{\operatorname{Re} z \geqslant 1/2\},$$

где $K^{(1)}_{1/2} \cup K^{(2)}_{1/2} = K_{1/2}$ и $K^{(1)}_{1/2} \cap K^{(2)}_{1/2} = \{1/2\}$. Предельная функция последовательности полиномов (5) имеет вид

$$\varphi(z) \equiv \begin{cases} 1-2z, & z \in K^{(1)}_{1/2}, \\ 2z-1, & z \in K^{(2)}_{1/2}, \end{cases} \tag{10}$$

причем $\varphi(x) = f(x) = |2x-1|$ для всех точек $x \in [0,1] \subset K_{1/2}$.

Разложение Поповичу (6) позволяет провести общее исследование характера сходимости полиномов (5) на плоскости $\mathbb{C}$ и дать точные оценки уклонения

$$R_{2m}(f,z) \equiv B_{2m}(f,z) - \varphi(z), \qquad z \in K_{1/2}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Оказывается, полиномы Бернштейна от модуля (2) сходятся к предельной функции (10) внутри компакта $K_{1/2}$ с экспоненциальной скоростью

$$R_{2m}(f,z) \sim \frac{2z(1-z)}{(2z-1)^2}\,\frac{\big(4z(1-z)\big)^m}{m\sqrt{m\pi}}, \qquad m \to \infty. \tag{12}$$

Асимптотика (12) действует во всех точках $z \in K_{1/2} \setminus \Lambda_{1/2}$, кроме, конечно, $z=0$ и $z=1$, где $R_{2m}(f,0) = R_{2m}(f,1) = 0$. При приближении к границе сходимость «портится», переходя на самой лемнискате $\Lambda_{1/2}$ в медленное степенное стремление. Справедлива общая оценка

$$|R_{2m}(f,z)| < R_{2m}(f,1/2) = 2^{-2m}\, C^m_{2m}, \quad z \in K_{1/2} \setminus \{1/2\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда видно, что «наихудшей» в смысле сходимости на компакте $K_{1/2}$ является точка $z=1/2$ с асимптотикой уклонения $R_{2m}(f,1/2) \sim 1/\sqrt{m\pi}$ при $m \to \infty$.

Отметим, что сравнительно недавно подобную теорию сходимости полиномов Бернштейна удалось распространить на случай произвольного *рационального модуля* $f(x) = |qx-p|$ при помощи разработанного аппарата *обобщенных разложений Поповичу* (см. подробный обзор [9] и заметку Д. Г. Цветкович в настоящем сборнике). Результаты для рационального модуля в общих чертах воспроизводят изложенное выше.

На основном отрезке $[0,1]$ оценки уклонения полиномов Бернштейна от функции (2) приобретают вполне завершенный вид. Формулу уклонения (11) естественно переписать в виде

$$R_{2m}(f,x) \equiv B_{2m}(f,x) - f(x), \qquad x \in [0,1], \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

с полиномами Бернштейна (5) и функцией $f(x) = |2x-1|$. Именно так понимаем $R_{2m}(f,x)$ всюду в дальнейшем.

Используем разложение Поповичу (6) и степенное разложение модуля

$$|2x-1| = \sqrt{1-4x(1-x)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, \left(4x(1-x)\right)^k,$$

верное при $x \in [0,1]$ в силу формулы (7). Получим представление

$$R_{2m}(f,x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, \left(4x(1-x)\right)^k, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

действующее при всех $x \in [0,1]$ (точнее даже, при замене x комплексной переменной $z \in K_{1/2}$). Именно на (14) базируется такой результат.

Теорема 1. *Для поточечного уклонения* (13) *справедлива оценка*

$$F_m(x;3) \leqslant R_{2m}(f,x) \leqslant F_m(x;1), \quad x \in [0,1], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где

$$F_m(x;a) \equiv \frac{2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \left(4x(1-x)\right)^{m+1}}{2(m+1)(2x-1)^2 + 4ax(1-x)} \tag{16}$$

с параметром $a > 0$.

Двусторонняя оценка (15) учитывает все особенности поведения уклонения $R_{2m}(f,x)$ на отрезке $[0,1]$, включая экспоненциальный характер стремления к нулю при $x \in (0,1/2) \cup (1/2,1)$ и степенной — при $x = 1/2$. Весьма неожиданно, что такого эффекта «два в одном» удается добиться от изначально негладкого уклонения (13) при помощи гладкого на $[0,1]$ единого шаблона (16).

Исходная версия подобных оценок была анонсирована в обзоре [5]. Но первое строгое доказательство для более сложной оценки сверху (15) дано в работе [7] на базе предложенного там метода оценивания остатков степенных рядов с положительными, логарифмически выпуклыми коэффициентами. В настоящий момент мы располагаем полным доказательством теоремы 1, основанным лишь на элементарных комбинаторных свойствах коэффициентов

$$\sigma_k \equiv \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

входящих в представление (14) (а также в формулы (6) и (7)).

Теорема 1 дает идею представить уклонение (13) в виде

$$R_{2m}(f,x) = \frac{2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \big(4x(1-x)\big)^{m+1}}{2(m+1)(2x-1)^2 \,+\, 4x(1-x)\,\eta_m\big(4x(1-x)\big)} \tag{18}$$

с некоторой функцией $\eta_m(s)$ переменной $s \in [0,1]$. То, что эта идея содержательна, показывает следующий результат последнего времени.

Теорема 2. *При любом* $m \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in [0,1]$ *поточечное уклонение* (13) *с порождающей функцией* (2) *представимо в виде* (18), *где*

$$\eta_m(s) = 2(m+1)\left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k+m+2}\, s^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k+m+1}\, s^k}\right), \qquad s \in [0,1],$$

с положительными коэффициентами σ_k *из формулы* (17). *При каждом фиксированном* $m \in \mathbb{N}$ *функция* $\eta_m(s)$ *является непрерывной, положительной, строго убывающей и строго выпуклой вверх на* $[0,1]$ *с граничными значениями*

$$\begin{cases} \eta_m(0) = \dfrac{3(m+1)}{m+2}, & \eta_m'(0) = -\dfrac{3(m+1)(2m+1)}{2(m+2)^2\,(m+3)}, \\ \eta_m(1) = 1, & \eta_m'(1) = -\infty. \end{cases}$$

На любом отрезке $[0,l] \subset [0,1)$ *последовательность* $\eta_m(s)$ *строго возрастает по* $m \in \mathbb{N}$ *и равномерно снизу сходится к константе* 3.

Все свойства функции $\eta_m(s)$, перечисленные в теореме 2, важны при анализе формулы уклонения (18). Теперь, например, нетрудно показать, что при использовании шаблона (16) значения $a = 3$ и $a = 1$ в нижней и верхней границах (15) будут неулучшаемыми.

Наиболее трудным при выводе теоремы 2 неожиданно оказалось обоснование строгого возрастания последовательности $\eta_m(s)$ по $m \in \mathbb{N}$ на любом отрезке $[0,l] \subset [0,1)$. Доказательство данного факта потребовало особых усилий. Впрочем, «игра стоила свеч»: если правильно применить теперь упомянутое строгое возрастание по $m \in \mathbb{N}$, то для самого уклонения $R_{2m}(f,x)$ при всех $x \in [0,1]$ и всех $m \in \mathbb{N}$ удается установить новую усиленную оценку сверху с мажорантой

$$\Phi_m(x) \equiv \frac{2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, \big(4x(1-x)\big)^{m+1}}{m(2x-1)^2 + 2x(1-x) + \sqrt{\big(m(2x-1)^2 + 2x(1-x)\big)^2 + 4(m+1)(2x-1)^2}}\,,$$

существенно более точной, чем в теореме 1. Компьютерные расчеты показывают, что оценка сверху $R_{2m}(f,x) \leqslant \Phi_m(x)$ дает чрезвычайную точность и является практически идеальной.

Изложенную концепцию с естественными техническими поправками полезно распространить не только на полиномы Бернштейна от рационального модуля $f(x) = |qx - p|$ или от кусочно линейных функций, но и на полиномы Бернштейна от функций, имеющих в своем составе какой-то линейный кусок. Есть твердая уверенность — здесь действует универсальный принцип: на плоскости $\mathbb{C}$ во внутренних точках области, примыкающей к линейному куску функции $f \in C[0,1]$ и ограниченной соответствующими лемнискатами Канторовича, сходимость полиномов Бернштейна (1) происходит с экспоненциальной скоростью, причем эта скорость падает при приближении точки к границе области. Частичные иллюстрации к данному принципу см. в [5, 9, 10]. Отмеченный эффект нуждается, на наш взгляд, в дальнейшем изучении как с качественной, так и с количественной точек зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. 130 p.

[2] *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

[3] *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

[4] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. ун-та. Математика. Механика. Информатика, 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

[5] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Том. 8. Ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

[6] *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. Vol. 10. P. 49–54.

[7] *Попов А. Ю.* Оценка сверху остатка степенного ряда с положительными коэффициентами специального вида // Челяб. физ.-матем. журнал, 2017. Т. 2, № 2. С. 193–198.

[8] *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд-ние мат. и естеств. наук, 1931. № 8. С. 1103–1115.

[9] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры ВИНИТИ. (В печати.)

[10] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* О скорости сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области на классе кусочно линейных порождающих функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2019, СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. С. 116–121.