УДК 517.982.22

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА – ЛОРЕНЦА

С. В. Асташкин, С. И. Страхов (Самара, Россия)
astash56@mail.ru, www.stepan121@mail.ru

Доклад посвящён дизъюнктно однородным пространствам Орлича–Лоренца. Будут даны условия, при которых в пространстве Орлича–Лоренца все относительно слабо компактные подмножества имеют равностепенные абсолютно непрерывные нормы.

Ключевые слова: дизъюнктно однородное пространство, пространство Орлича–Лоренца, слабо компактное множество.

ON SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF ORLICZ – LORENTZ SPACES

S. V. Astashkin, S. I. Strakhov (Samara, Russia)
astash56@mail.ru, www.stepan121@mail.ru

The presentation focuses on disjointly homogeneous Orlicz–Lorentz spaces. We will give conditions under which all relatively weakly compact sets have equi-absolutely continuous norms.

Keywords: disjointly homogeneous spaces, Orlicz–Lorentz Spaces, weakly compact set.

Симметричное пространство E называется *дизъюнктно однородным* или *DH пространством*, если из любой пары дизъюнктных нормированных последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ из E можно выделить эквивалентные в E подпоследовательности. Если же всякая $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ содержит подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису пространства l_p, то говорят, что E — *p-DH пространство.*

Пусть ϕ — функция Орлича, т.е., возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $\phi(0) = 0$ и $w(t)$ – положительный убывающий вес на [0,1]. Через $x^*(t)$ обозначим невозрастающую непрерывную слева перестановку функции $|x(t)|$. Пространство Орлича-Лоренца $\Lambda_{\phi,w}$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что

$$\|x\|_{\phi,w} := \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 \phi\left(\frac{x^*(t)}{u}\right) w(t)dt \le 1 \right\} < \infty.$$

В теории пространств Орлича-Лоренца $\Lambda_{\phi,w}$ значительную роль играют свойства следующих множеств непрерывных функций на $[0, \frac{1}{2}]$:

$$E^{\infty}_{\phi,A} = \overline{\left\{ G(x) = \frac{\phi(xy)}{\phi(y)} \ : y > A > 0 \right\}}, \quad E^{\infty}_{\phi} = \bigcap_{A>0} E^{\infty}_{\phi,A},$$

где замыкание берётся в пространстве $C[0, \frac{1}{2}]$ (см. [1]). Теорема 4.1 из работы [2] для пространств Орлича может быть распространена на пространства Орлича-Лоренца.

Теорема 1. *$\Lambda_{\phi,w}$ — DH пространство тогда и только тогда, когда $E_\phi^\infty \cong \{\psi\}$, т.е. все функции из множества E_ϕ^∞ эквивалентны на $[0, \frac{1}{2}]$ функции ψ. Более того, $\Lambda_{\phi,w}$ — DH пространство, если и только если оно для некоторого $1 \le p \le \infty$ имеет p-DH свойство, и в этом случае $E_\phi^\infty \cong \{t^p\}$.*

Для 1-DH пространств имеет место обобщение классического результата Данфорда-Петтиса о слабо компактных множествах [3, Th. 3.4]. Поэтому, применяя теорему 1, а также [3, Th. 3.4], получаем

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\Lambda_{\phi,w}$ — 1-DH пространство;

(ii) всякое относительно слабо компактное подмножество пространства $\Lambda_{\phi,w}$ имеет равностепенные абсолютно непрерывные нормы в $\Lambda_{\phi,w}$;

(iii) $\phi(t) = t$ и $w(t) \equiv 1$, т.е. $\Lambda_{\phi,w} = L_1$, или функция Орлича $\tilde{\phi}$, дополнительная к ϕ, удовлетворяет условию: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\tilde{\phi}(ct)}{\tilde{\phi}(t)} = \infty$ для некоторого $c > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kaminska A., Raynaud Y.* Isomorphic copies in the lattice E and its symmetrization $E^{(*)}$ with applications to Orlicz-Lorentz spaces // J. Funct. Anal. 2009. Vol. 257. P. 271–331.

[2] *Flores J., Hernandez F. L., Semenov E. M., Tradacete P.* Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices // Israel J. Math. 2012. Vol. 188. P. 323–352.

[3] *Astashkin S. V.* Rearrangement invariant spaces satisfying Dunford-Pettis criterion of weak compactness // Contemp. Math. 2019. Vol. 733 P. 45–59.