УДК 517.5

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_{p,\alpha}$

Т. Е. Тилеубаев (Нур-Султан, Казахстан)
Tileubaev@mail.ru

В работе получены уточнения прямой и обратной теоремы теории прибижения в пространствах L_p со степенным весом.

Ключевые слова: наилучшее приближение,модуль гладкости.

DIRECT AND INVERSE THEOREMS IN SPACES $L_{p,\alpha}$ SPACES

T. E. Tileubayev (Nur-Sultan, Kazakhstan)
Tileubaev@mail.ru

In the work are sharped direct and inverse theorems of theory appoximations in space L_p with degree weight.

Keywords: best appoximation, modulus of smoothness function.

Введение

Пусть $1 \leq p \leq \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0, \infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0, \infty)$. Норма в пространстве определяется

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)|, p = \infty.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{p,\alpha}$ оператор обобщенного сдвига [1] функции $f(x)$

$$T^h f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha} d\varphi.$$

Отметим, что некоторые свойства оператора $T^h : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$

$$T^h j_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda h),\ j_\alpha(u) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{u^\alpha} J_\alpha(u)$$

где $J_\alpha(u)$ — функция Бесселя первого рода порядка α,

$$\left\|T^h(f)\right\|_{p,\alpha} \le C\,\|f\|_{p,\alpha}\,, 1 \le p \le \infty$$

$$\int_0^\infty T^h f(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x) T^h g(x) x^{2\alpha+1} dx.$$

Для любой функции $f \in C^2(R_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t) = u(t,s),\ t,s \in R_+$ определим как решение следующей задачи Коши (см.[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{2\alpha+1}{s}\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$u(t,0) = f(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = 0.$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha}$ конечные разности $\Delta_h^k f(x)$ порядка $k(k = 1,2,...)$ с шагом $h > 0$ определим следующим образом

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x) - T^h(x), \Delta_h^k f(x) = \Delta_h^1\left(\Delta_h^{k-1} f(x)\right),\ k > 1.$$

Величину

$$\Omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} = \sup_{0<h\le\delta} \left\|\Delta_h^k f\right\|_{p,\alpha}$$

будем называть обобщенным модулем гладкости k-го порядка функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Обозначим через $M(\nu,p,\alpha), \nu > 0$ множество всех функций $Q_\nu(t), t \in R$, удовлетворяющих следующим условиям :

1) $Q_\nu(t)$ — четная целая функция экспоненциального типа ν; 2) $Q_\nu(t)$ — принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ из класса $M(\nu,p,\alpha)$ определим следующим образом:

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = \inf\{\|f - Q_\nu\|_{p,\alpha} :\ Q_\nu \in M(\nu,p,\alpha)\}.$$

Основные результаты

Из историй теории приближения функций известно, что прямая теорема теории приближения была доказана Д. Джексоном в 1911 году.

Теорема A. *Для любой $f \in C_\infty$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_\infty \le C\omega_k(f;1/n)_\infty.$$

Эта теорема была уточнена в 1965 году М. Ф. Тиманом (см. [4])

$$n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{sk-1}E_\nu^s(f)_p\right)^{1/s}\le C\omega_k(f;1/n)_p,\ 1<p<\infty, s=\max(p,2),$$

где

$$E_\nu(f)_p=\inf_{n\le k}\|f-T_n\|_p,$$

$$\omega_k(f;1/n)_p=\sup_{|h|<t}\|\Delta_h^kf\|_p,\ \Delta_hf(x)=f(x+h)-f(x), \Delta_h^kf(x)=\Delta_h(\Delta_h^{k-1}f(x)).$$

В 1958 году получил М. Ф. Тиман уточнение обратного неравенства для $f\in L_p$, $1<p<\infty$ (см. [5])

$$\omega_k(f;1/n)_p\le Cn^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\tau k-1}E_\nu^\tau(f)_p\right)^{1/\tau},\quad \tau=\min(p,2).$$

В связи выше приведенными результатами возникает вопрос, можно ли получить аналогичние результаты например, в пространствах L_p со степенным весом.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $\tau=\max(p,2)$. *Тогда*

$$\Omega_m(f,n^{-2k})_{p,\alpha}\ge Cn^{-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2m\tau-1}E_\nu^\tau(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Теорема 1 является уточнением теоремы 4.2 из работы [2, с. 187].

Теорема 2. *Пусть* $1<p<\infty$, $s=\min(p,2)$. *Тогда*

$$\Omega_m(f,n^{-2k})_{p,\alpha}\le Cn^{-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2ms-1}E_\nu^s(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Теорема 3. *Если* $1<p<\infty$, $s=\min(p,2)$, $f\in L_{p,\alpha}$,*и ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2r-1}E_\nu(f)_{p,\alpha}$$

сходиться, то $f\in W_{p,\alpha}^r$ *и справедливы неравенства*

$$\Omega_m(B^rf,n^{-k})_{p,\alpha}\le\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{2r-1}E_\nu(f)_{p,\alpha}+n^{-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2ms-1}E_\nu^s(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}\right\}.$$

Теоремы 2 и 3 являются уточнением соответстующих теорем 1.3 и 1.4 из [6, с. 49].

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $s = \min(p, 2)$. *Тогда*

$$\Omega_m(f,h)_{p,\alpha} \leq Ch^{2m} \left(\int_h^1 t^{-s2m-1} \Omega_{m+1}^s(f)_{p,\alpha} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Левитан Б. М.* Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.

[2] *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

[3] *Иванов В. И.* О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом // Матем. заметки. 2015. Т. 95, вып. 5. С. 684–694.

[4] *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ // Матем. сб. 1958. Т. 46 (88), № 1. С. 125–132.

[5] *Тиман М. Ф.* Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p // Исслед. соврем. пробл. конструктивной теории функций. Баку : АН Азерб. ССР, 1965. С. 18–25.

[6] *Платонов С. С.* Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые обратные теоремы теории приближения функций на полупрямой // Труды ПГУ. Математика. 2007. Вып. 14. С. 44–57.