УДК 517.587

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ ПОЛИНОМОВ, ПОРОЖДЁННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЯКОБИ

М. С. Султанахмедов (Махачкала, Россия)

sultanakhmedov@gmail.com

Одним из ключевых свойств классических ортогональных полиномов является так называемое трёхчленное рекуррентное соотношение. Оно используется в исследовании дальнейших свойств систем ортогональных полиномов, а также для вычисления значений полиномов в произвольно заданной точке. В настоящей работе установлены рекуррентные соотношения для полиномов, ортогональных по Соболеву и порождённых классическими ортогональными полиномами в общем случае, а также для одного конкретного случая — полиномов порождённых полиномами Якоби.

Ключевые слова: рекуррентные формулы, ортогональные полиномы, ортогональность по Соболеву, пространства Соболева, полиномы Якоби.

RECURRENT FORMULAS FOR SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS GENERATED BY JACOBI POLYNOMIALS

M. S. Sultanakhmedov (Makhachkala, Russia)

sultanakhmedov@gmail.com

One of the key properties of the classical orthogonal polynomials is the three-term recurrent formula. It can be used for the polynomial systems' further properties investigation, as well as for calculating the values of these polynomials at the given point. We establish the recurrent formulas for Sobolev orthogonal polynomials generated by the classical orthogonal polynomials in the general case, as well as for one specific case — polynomials generated by the Jacobi polynomials.

Keywords: recurrent formula, orthogonal polynomials, Sobolev orthogonality, Sobolev space, Jacobi polynomials.

Введение

Обозначим через $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ систему функций, ортонормированную в пространстве Лебега $L^2_\omega(a,b)$ измеримых на (a,b) функций $f(x)$, для которых $\int\limits_a^b |f(x)|^p\omega(x)dx < \infty$, где $\omega = \omega(x)$ — весовая функция. Более точно,

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2_\omega} = \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)\omega(t)dt = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Через $W^r_{L^2_\omega(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно-дифференцируемых $(r-1)$ раз на $[a,b]$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^2_\omega(a,b)$. Скалярное произведение в $W^r_{L^2_\omega(a,b)}$ имеет вид

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int\limits_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\omega(t)dt. \tag{1}$$

Скалярные произведения такого вида называются скалярными произведениями типа Соболева.

В работе [1] показано, что из системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ можно породить систему функций, ортонормированную в смысле (1), посредством равенств

$$\varphi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1,$$

$$\varphi_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

причём эта новая система будет полна в $W^r_{L^2_\omega(a,b)}$, если исходная система была полна в $L^2_\omega(a,b)$. В дальнейшем будем считать $\varphi_{0,n}(x) = \varphi_n(x)$.

Положим теперь $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ одной из систем классических ортогональных полиномов. Хорошо известно, что одним из ключевых свойств таких систем является трёхчленная рекуррентная формула вида

$$\varphi_n(x) = (A_n x + B_n)\varphi_{n-1}(x) + C_n \varphi_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Эта формула применяется не только для отыскания значений полинома $\varphi_n(x)$ в любой заданной точке x, но и для исследования дальнейших свойств системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Нами доказано следующее утверждение, устанавливающее рекуррентные соотношения для полиномов, ортогональных по Соболеву и порождённых классическими ортогональными полиномами, в общем случае.

Теорема 1. *При $r \geq 1$ для системы полиномов $\{\varphi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональных в смысле Соболева и порождённых системой ортогональных полиномов $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, имеют место следующие рекуррентные формулы*

$$\varphi_{r,0}(x) = 1, \quad \varphi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)}{n}\varphi_{r,n-1}(x), \quad 1 \leq n \leq r-1;$$
$$\varphi_{0,n}(x) = \varphi_n(x); \quad \varphi_{n+1,n+1}(x) = \frac{(x-a)}{n+1}\,\varphi_{n,n}(x), \quad n \geq 0;$$
$$A_n r \varphi_{r+1,r+n}(x) = (A_n x + B_n)\varphi_{r,r+n-1}(x) +$$
$$+ C_n \varphi_{r,r+n-2}(x) - \varphi_{r,r+n}(x), \qquad n \geq 2,$$

где A_n, B_n и C_n имеют тот же смысл, что и в ().

Замечание 1. Рекуррентные соотношения для полиномов $\varphi_{1,n+1}(x)$, $n \geq 1$, для каждой конкретной системы необходимо устанавливать отдельно, используя специальные свойства исходной ортогональной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ (интегральные и дифференциальные свойства).

Рекуррентные формулы для полиномов Соболева – Якоби

Классические ортогональные полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ могут быть определены с помощью формулы Родрига (см. [2]) следующим образом

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\rho(x)\sigma^n(x)\right\},$$

где $\rho(x) = \rho(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \sigma(x) = 1-x^2$. При $\alpha,\beta > -1$ полиномы Якоби образуют ортогональную систему в $L^2_\rho(-1,1)$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta}(t)\rho(t)dt = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

Обозначим через $p_n^{\alpha,\beta}(x) = [h_n^{\alpha,\beta}]^{-1/2}P_n^{\alpha,\beta}(x)$ ортонормированный вариант полиномов Якоби.

Рассмотрим полиномы $p_{r,k}(x)$ $(r = 1,2,\ldots)$, определённые на $[-1,1]$ посредством равенств

$$p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1,$$

$$p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}p_n^{\alpha,\beta}(t)dt, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Рекуррентные формулы для полиномов Соболева–Якоби такого вида устанавливает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для полиномов $\{p_{r,n}^{\alpha,\beta}\}$ при $\alpha,\beta > -1$ справедливы следующие соотношения*

$$p_{r,0}^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)}{k}p_{r,k-1}^{\alpha,\beta}(x), \quad 1 \le k \le r-1;$$

$$p_{0,n}^{\alpha,\beta}(x) = p_n^{\alpha,\beta}(x); \quad p_{r,r}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)}{r}\,p_{r-1,r-1}^{\alpha,\beta}(x), \quad r \ge 1;$$

$$p_{1,k+1}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{2\left(h_k^{\alpha,\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}}{k+\alpha+\beta}\left[P_{k+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x) + (-1)^k\binom{k+\beta}{k+1}\right], \quad k = 1,2,\ldots;$$

$$rp_{r+1,r+n}^{\alpha,\beta}(x) = \left(x + A_n^{\alpha,\beta}\right)p_{r,r+n-1}^{\alpha,\beta}(x) -$$

$$-B_{n-1}^{\alpha,\beta} p_{r,r+n-2}^{\alpha,\beta}(x) - B_n^{\alpha,\beta} p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x), \qquad r \geq 1, n \geq 2,$$

где

$$A_n^{\alpha,\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)},$$

$$B_n^{\alpha,\beta} = \frac{2}{2n+\alpha+\beta} \sqrt{\frac{n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta+1)}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Sharapudinov I. I.* Asymptotic properties of polynomials, orthogonal in Sobolev sence and associated with the Jacobi polynomials // Daghestan electronic mathematical reports. 2016. Vol. 6. P. 1–24.

[2] *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. Providence, RI : American Mathematical Society, 1959. 432 p.