УДК 517.5

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Д. А. Волков
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

При некоторых ограничениях найдена скорость сходимости (в том числе и недиагональных) аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода экспоненциальных функций. Доказанные утверждения дополняет результаты, полученные ранее в работах других авторов.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства..

THE CONVERGENCE RATE HERMITE – PADÉ APPROXIMANTS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS[1]

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko, D. A. Volkov
(Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Under some restrictions, the convergence rate of type II Hermite – Padé approximants of exponential functions is found (including nondiagonal case). The statements proved in the paper complement the results obtained earlier by other authors.

Keywords: Hermite – Padé polynomials, Hermite – Padé approximations, asymptotic equality..

Рассмотрим систему экспоненциальных функций

$$\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k},$$

где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – различные не равные нулю комплексные числа. Для индекса $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z) \not\equiv 0$, $P^j_{n,\vec{m}}(z)$, $\deg Q_{n,\vec{m}} \leqslant m$, $\deg P^j_{n,\vec{m}} \leqslant n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющие условиям:

$$R^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = Q_{n,\vec{m}}(z)e^{\lambda_j z} - P^j_{n,\vec{m}}(z) = O(z^{n+|m|+1}),\ z \to 0,$$

где $|m| = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $n_j = n + |m| - m_j$. При $k = 1$ считаем $\lambda_1 = 1$.

Многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P^1_{n,\vec{m}}(z)$, $\ldots$, $P^k_{n,\vec{m}}(z)$ принято называть *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а рациональные функции

$$\pi^j_{n,\vec{m}}(z) = \pi^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = \frac{P^j_{n,\vec{m}}(z)}{Q_{n,\vec{m}}(z)},\ \ j = 1, 2, \ldots, k$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф18М-025).
[1]The article is done with the financial support of BRFBR (project No. F18M-025).

— *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (*совместными аппроксимациями Паде*) системы экспонент. Диагональному случаю соответствует набор индексов $n = m_1 = \ldots = m_k$. Явные конструкции таких многочленов и рациональных функций впервые появились в работе Ш. Эрмита (см. [1], [2]), посвященной доказательству трансцендентности числа e.

В случае $k = 1$ Паде (см. [3]) и Перрон [4] доказали, что на компактах из $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z) := \pi^1_{n,m}(z)$ равномерно сходятся к e^z при $n + m \to \infty$. Основываясь на результатах численного эксперимента, Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z)$, доказательство которой получено Д. Браессом [5]: *для любого комплексного z при $n + m \to \infty$*

$$e^z - \pi_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{m!\ n!\ e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\ (n+m+1)!}\ z^{n+m+1}\ (1 + o(1)).$$

Е. М. Никишин обратил внимание на необходимость исследования сходимости совместных аппроксимаций Паде системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ в многомерном случае, когда $k > 1$. Решение поставленной им задачи было получено А. И. Аптекаревым [6], который доказал, что при $n+|m| \to +\infty$ дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j \xi})$ сходятся равномерно к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$. Вместе с тем, вопрос о том, какова скорость равномерной сходимости дробей $\pi^j_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j \xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ в общей постановке остаётся открытым. Имеющиеся результаты (см., например, [7] – [11]) относятся в основном к диагональному случаю. Так в [7] с помощью метода матричной задачи Римана – Гильберта при $\gamma = 1$, $k = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ найдена скорость сходимости «сжатых» диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде. Более общий результат при $k = 2$ получен в [12]:

Теорема 1. *Пусть $\vec{m} = (m_1, m_2)$, $|m| = m_1+m_2$, а дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j z})$ являются аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^2$, где λ_1, λ_2 — различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если*

$$\lim_{n\to\infty} m(n)/\sqrt{n} = 0,$$

то равномерно по всем m, $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, при $n \to +\infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_1 z}) =$$

$$= (-1)^{|m|}\ \frac{m_1!\, n!\, (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!\ (n+m_1+1)!}\ (1 + o(1)),$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_2 z}) =$$

$$= (-1)^{|m|} \, \frac{m_2! \; n! \; (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! \; (n+m_2+1)!} \; (1 + o(1)) \, ,$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leqslant L$.

Методы Лапласа и перевала, применяемые при изучении асимптотических свойств диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде, в общем случае не работают. При доказательстве теоремы 1 в [12] применяется новый подход, который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала. Совершенствуя метод работы [12], нами установлена следующая

Теорема 2. *Пусть n, m_1, m_2, $\ldots$, m_k – произвольные целые неотрицательные числа, а рациональные дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z)$ являются аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода для системы экспонент $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если*

$$\lim_{n \to \infty} m(n)/\sqrt{n} = 0,$$

то равномерно по всем m, $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, при $n \to +\infty$

$$e^{\lambda_j z} - \pi^j_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \; \lambda_j^{n+m_j+1} \; \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^{m_i} \times$$

$$\times \frac{m_j! \; n! \; z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! \; (n+m_j+1)!} \; (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, ..., k,$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leqslant L$.

Теорема 2 является обобщением теоремы 1. Более того, она согласуются со всеми известными результатами. В частности, при сделанных в ней предположениях она согласуется с результатом Д. Браесса [5]. В случае $k = 1$ произведение $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^{m_i}$ в предыдущем равенстве следует заменить единицей.

Отметим также, что при доказательстве теоремы 2 существенно используется следующее асимптотическое равенство, доказательство которого имеет технический характер: *при $n + m \to \infty$*

$${}_1F_1(m+1; m+n+2; z) = e^{\frac{m}{m+n} z} \, (1 + o(1)),$$

где

$$ {}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!} $$

— гипергеометрическая функция,

$$ (\gamma)_0 = 1, \ \ (\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1) $$

— символ Похгаммера, а оценка $o(1)$ *равномерна по* z *на компактах из* $\mathbb{C}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C.R. Acad. Sci. 1873. Vol. 77. P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[2] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.

[3] *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения. М. : Мир, 1986. 502 с.

[4] *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig : Teubner, 1929. 524 p.

[5] *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II // J. Approx.Theory. 1984. Vol. 40, № 4. P. 375–379.

[6] *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.

[7] *Kuijlaars A. B. J., Stah H., Van Assche W., Wielonsky F.* Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function // J. of Comput. and Appl. Math. 2007. Vol. 207, № 2. P. 227–244.

[8] *Kuijlaars A. B. J., Stah H., Van Assche W., Wielonsky F.* Asymptotique des approximants de Hermite-Padé quadratiques de la fonction exponentielle et probl‘emes de Riemann-Hiebert // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2003. Vol. 336. P. 893–896.

[9] *Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: a Riemann – Hiebert approach // Constr. Approx. 2005. Vol. 21, № 3. P. 351–412.

[10] *Старовойтов А. П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 88–91.

[11] *Кечко Е. П., Сидорцов М. В.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Сер. Естественные науки. 2019. № 3 (144). С. 158–162.

[12] *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера // Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 241–258.