УДК 517.28, 517.54, 517.41

ГИПОТЕЗА О ЯКОБИАНЕ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ[1]

В. В. Старков (Петрозаводск, Россия)
VstarV@list.ru

Гипотеза о якобиане в современной трактовке предполагает инъективность полиномиального отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) при условии, что якобиан $J_f \equiv const \neq 0$. В этой заметке исследуется вопрос о структуре полиномиальных отображений f, для которых $J_f \equiv const \neq 0$. Также рассматриваются некоторые достаточные условия инъективности неполиномиальных отображений.

Ключевые слова: гипотеза о якобиане, отображение Келлера.

JACOBIAN CONJECTURE AND ITS GENERALIZATIONS[1]

V. V. Starkov (Petrozavodsk, Russia)
VstarV@list.ru

The Jacobian Conjecture was first formulated by O. Keller in 1939. In the modern form it supposes injectivity of the polynomial mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ provided that jacobian $J_f \equiv const \neq 0$. In this note we consider structure of polynomial mappings f that provide $J_f \equiv const \neq 0$. Also we consider some sufficient conditions of injectivity for non polynomial mappings.

Keywords: Jakobian conjecture, Keller mappings.

Обозначим $\mathcal{P}_m$ множество всех полиномов в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) степени, не превосходящей m. Пусть P_m — множество всех полиномиальных отображений $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$), $F_k \in \mathcal{P}_m (k = 1, \ldots, n)$. Обозначим D_F матрицу Якоби и J_F — якобиан отображения F (в комплексном случае DF и J_F комплексные). Сформулированная Келлером [1] в 1939 г. *Гипотеза о якобиане* (**JC**) в современной ее трактовке заключается в следующем:

если $F \in P_m$ и $J_F \equiv const \neq 0$, то F инъективно в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Положительное решение гипотезы открывало бы возможность ее обширного приложения в ряде направлений математики.

В [2] гипотеза доказана для $F \in P_2$ для любого n, в [3] гипотеза проверена для $n = 2$ и $F \in P_{100}$. Однако, до сих пор **JC** не доказана и не опровергнута ни при каком значении n. Гипотеза включена в список 18 проблем “Mathematical Problems for the Next Century” [4].

В этой заметке ставится вопрос о структуре отображений $F \in P_m$ с $J_F \equiv const \neq 0$, именно он представляется ключевым в доказательстве или опровержении **JC**. Решение этого вопроса с последующим применением критериев или достаточных условий инъективности отображения приведет к существенным продвижениям в **JC**.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

[1] The work is supported by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01229).

Отображение $F \in P_m$ будем называть отображением Келлера, если $F(0) = 0$, $J_F \equiv 1$ и его матрица Якоби $D_F(0) = I$ — единичная матрица. В [5] дано полное описание отображений Келлера для $n = 2, m = 3$.

Теорема А. [5] *Пусть $n = 2$, $F \in P_3$, $F(0) = 0$. F - отображение Келлера тогда и только тогда, когда $F = A^{-1} \circ g \circ A$, где $g(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$,*

$$U(x, y) = x + \alpha_2(x + y)^2 + \alpha_3(x + y)^3,$$

$$V(x, y) = y - \alpha_2(x + y)^2 - \alpha_3(x + y)^3,$$

α_2 и α_3 - произвольные фиксированные постоянные, A - линейное однородное невырожденное отображение.

Теорема В. [6] *Пусть для $n \geq 2$, отображение $F(X) = (u_1, \dots, u_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определено следующим образом:*

$$u_k(X) = x_k + p_{k2}(x_1 + \dots + x_n)^2 + \dots + p_{km}(x_1 + \dots + x_n)^m \ , \qquad (1)$$

$(k = 1, \dots, n)$ и p_{kj} - любые постоянные, удовлетворящие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{kj} = 0$ для всех $j = 2, \dots, m$. Тогда **JC** *справедлива для F.*

Вопрос 1: останется ли справедливым утверждение Теоремы В, если в определении (1) координатных функций $u_k(X)$ сумму $z = x_1 + \dots + x_n$ заменить на $Z = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ с произвольным вектором $B = (b_1 + \dots + b_n), B \nparallel (1, \dots, 1)$.

Задача решается подбором для каждого отображения f из Теоремы В неособенной матрицы A такой, что $F(X) = A^{-1} f(AX)$ обладает нужными свойствами. Оказывается, матрица A с таким свойством существует не всегда.

Теорема 1. *Пусть $k = 1, \dots n$ и $P^{(k)} = (p_{k2}, \dots, p_{km})$ – $(m - 1)-$мерные векторы, не все из которых нулевые, $\sum\limits_{k=1}^{n} P^{(k)} = 0$. Пусть $\mathbb{R}^n \ni B = (b_1, \dots, b_n) \neq (1, \dots, 1)$, $F(X)$ из Теоремы В определяется условием (1) посредством векторов $P^{(k)}$.*

1) Если в наборе векторов $P^{(k)}, k = 1, \dots, n$ линейно независимых векторов не более $(n - 2)$, то существует неособенная матрица A такая, что

$$F(X) = A^{-1} f(AX) = X + \begin{pmatrix} q_{12} Z^2, \dots, q_{1m} Z^m \\ \dots \\ q_{n2} Z^2, \dots, q_{nm} Z^m \end{pmatrix}, \ \sum_{k=1}^{n} q_{kj} = 0 \qquad (2)$$

для всех $j = 2, \dots, m$, где $Z = (B, X)$.

2) Если среди векторов $P^{(k)}, k = 1, \dots, n$, $(n-1)$ линейно независимых, то не существует матрицы A со свойством (2).

Вопрос 2: насколько в Теореме 1 важно условие $\sum\limits_{k=1}^{n} q_{kj} = 0$ для того, чтобы полиномиальные отображения

$$F(X) = X + \sum_{j=2}^{m} Q_j Z^j, \text{ где } Q_j = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \dots \\ q_{nj} \end{pmatrix}, \quad Z = (B, X), \tag{3}$$

было отображением Келлера?

Теорема 2. *Для любого вектора $B = (b_1, \dots, b_n)$ и любых векторов Q_j, $j = 1, \dots, m$, из линейного пространства M, ортогонального вектору B, полиномиальное отображение $F(X)$ из (3) является отображением Келлера и для него справедлива* **JC.**

Теорема B является частным случаем Теоремы 2 при $B = (1, \dots, 1)$. В Теореме 2 условие принадлежности векторов Q_j пространству M, $M \perp B$, является существенным. Будут представлены и другие результаты в этом направлении, в частности,

Теорема 3. *Пусть для каждого натурального $s = 1, \dots, r$ полиномиальное отображение*

$$F_s(X) = X + \sum_{j=2}^{m} Q_j^{(s)} Z_s^j(X) =: \ X + V^{(s)}(X)$$

определяется формулой (3) и удовлетворяет Теореме 2, $Z_s(X) = (B_s, X)$, векторы $B_s = (b_1^{(s)}, \dots, b_n^{(s)}) \neq 0$; пусть $M_{n-1}^{(s)}$ – линейное $(n-1)$-мерное пространство, $M_{n-1}^{(s)} \perp B_s$ и для любого $j = 2, \dots, m$ справедливы включения $Q_j^{(1)} \in \bigcap\limits_{s=1}^{r} M_{n-1}^{(s)}$, $Q_j^{(2)} \in \bigcap\limits_{s=2}^{r} M_{n-1}^{(s)}$, $\dots$, $Q_j^{(r)} \in M_{n-1}^{(r)}$. Тогда полиномиальное отображение $F = F_r \circ F_{r-1} \circ \dots \circ F_1$ имеет вид $F(X) = X + \sum\limits_{s=1}^{r} V^{(s)}(X)$ и для него справедлива **JC**.

Все сформулированные здесь результаты справедливы как в вещественном, так и в комплексном случае.

Идеи, приведшие к теоремам 1–3, могут быть перенесены и на неполиномиальные отображения. В частности, справедлива

Теорема 4. *Для $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим: $z = x_1 + \ldots + x_n$. Пусть $h_k(z) \in C^1(\mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$, $H(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k(z)$. Если для любых*

$z', z'' \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $[H(z'') - H(z')]/(z'' - z') \neq -1$, *то отображение* $F(X) = (x_1 + h_1(z), \dots, x_k + h_n(z))$ *инъективно в* $\mathbb{R}^n$.

Следствие. *Если (в обозначениях теоремы 1)* $H'(z) \neq -1$, *то отображение* F *инъективно в* $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Keller O. H.* Ganze Cremona-Transformationen // Monatshefte Math. Phys. 1939. Vol. 47. P. 299–306.

[2] *Wang S. S. S.* A Jacobian criterion for separability // J. of Algebra. 1980. Vol. 65, № 2. P. 453–494.

[3] *Moh T. T.* On the global Jacobian conjecture and the configuration of roots // J. reine und angew. Math. 1983. Vol. 340. P. 140–212.

[4] *Smale S.* Mathematical Problems for the Next Century // Math. Intelligencer. 1998. Vol. 20, № 2. P. 7–15.

[5] *Starkov V. V.* Jacobian conjecture, two-dimensional case // Probl. Anal. Issues Anal. 2016. Vol. 5 (23), № 2. P. 69–78.

[6] *Ponnusamy S., Starkov V. V.* The Jacobian Conjecture and Injectivity Conditions // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 2018. Vol. 41, № 4. P. 2099–2115.