УДК 517.5

ПОСТРОЕНИЕ БАНАХОВА ФРЕЙМА В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ОПРЕДЕЛЕННОМ НА ПОЛИДИСКЕ[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Мы приводим конструкцию системы представления на основе дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди, определенном на двумерном полидиске комплексной плоскости. Мы используем понятие банахова фрейма, являющееся обобщением понятия фрейма Даффина–Шеффера. Построив банахов фрейм мы можем говорить о том, что произвольную функцию пространства Харди можно представить в виде ряда по последовательности дискретизированных ядер.

Ключевые слова: банахов фрейм, система представления, воспроизводящее ядро, ядро Сеге, пространство Харди.

ON THE CONSTRUCTION OF A BANACH FRAME IN THE HARDY SPACE DEFINED ON A POLYDISC[1]

K. S. Speransky, P. A. Terekhin (Saratov, Russia)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

We give the construction of a representing system based on the discretized Szego kernel in the Hardy space defined on a two-dimensional polydisc. We use a notion of a Banach frame which generalizes a notion of a Duffin-Shaeffer frame. Having constructed a Banach frame we can say that any function from the Hardy space can be represented as a series of discretized kernels.

Keywords: Banach frame, respresenting system, reproducing kernel, Szego kernel, Hardy space.

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$, определенное на двумерном полидиске комплексной плоскости

$$\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

состоит из всех аналитических функций вида

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{k_1, k_2 \geq 0} |c_{k_1 k_2}|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространство H^2 является пространством с воспроизводящим ядром

$$K_\lambda(z) = K(z, \lambda) = \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_1} z_1)(1 - \overline{\lambda_2} z_2)},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00414).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-01-00414).

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$. Воспроизводящее ядро K_λ называется ядром Сеге и его нормированная версия имеет вид

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{K(\lambda, z)}{\|K(\lambda, z)\|_{H^2}} = \frac{(1-|z_1|^2)^{1/2}(1-|z_2|^2)^{1/2}}{\left(1-\overline{\lambda_1}z_1\right)\left(1-\overline{\lambda_2}z_2\right)}.$$

Вопрос о существовании систем представления на основе дискретизированных воспроизводящих ядер $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве Харди на единичном диске комплексной плоскости был сформулирован в качестве открытой проблемы в статье [1]:

Вопрос 1. Существует ли последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ на открытом единичном диске такая, что последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ образует систему представления пространства $H^2(\mathbb{D})$?

Мы даем ответ на вопрос 1 для двумерного случая. Результат основан на применении теории банаховых фреймов и сохраняется при переходе к полидиску произвольной размерности. Результат для одномерного случая был опубликован в статье [2].

Пусть

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1$$

и $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{D}^2$ вида

$$\lambda_n = \lambda_{kj_1j_2} = (r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, r_k e^{\frac{2\pi i j_2}{n_k}}), \qquad j_1, j_2 = 0, 1, \ldots n_k - 1. \tag{1}$$

Далее, под условием согласования для n_k и r_k будем понимать выполнение неравенств

$$0 < a \le n_k(1 - r_k) \le b < \infty \tag{2}$$

с некоторыми постоянными $0 < a \le b < \infty$.

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{D}^2$ - последовательность точек вида (1), удовлетворяющая условиям согласования (2). Тогда последовательность значений нормированного ядра Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$, дискретизированных в этих точках образует фрейм пространства Харди H^2 относительно пространства коэффициентов X, состоящего из всех последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = \{\xi_{kj_1j_2}\}$, для которых

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j_1=0}^{n_k-1}\sum_{j_2=0}^{n_k-1} |\xi_{kj_1j_2}|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Мы используем здесь понятие фрейма (см., например, [3]), которое в отличие от атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу автоматически обеспечивает справедливость следствия 1 о представлении произвольной функции из пространства H^2 в виде ряда по последовательности дискретизированных ядер Сеге.

Следствие 1. Для каждой функции $f \in H^2$ существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Fricain E., Khoi L., Lefèvre P.* Representing systems generated by reproducing kernels // Indag. Math. 2018. Vol. 29, iss. 3. P. 860–872. DOI: https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.004

[2] *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indag. Math. 2018. Vol. 29, iss. 5. P. 1318–1325. DOI: https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.06.001

[3] *Терехин П. А.* Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 9. С. 127–146. DOI: https://doi.org/10.4213/sm5655