УДК 517.518

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В ОЦЕНКЕ С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО СУММЫ РЯДА ПО СИНУСАМ С ВЫПУКЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

А. П. Солодов (Москва, Россия)
apsolodov@mail.ru

Известно, что сумма ряда по синусам $g(\mathbf{b},x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$, коэффициенты которого образуют выпуклую последовательность $\mathbf{b}$, положительна на интервале $(0,\pi)$. Для оценки ее значений в окрестности нуля С. А. Теляковский использовал кусочно-непрерывную функцию $\sigma(\mathbf{b},x)=\bigl(1/m(x)\bigr)\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^2(b_k-b_{k+1})$, $m(x)=[\pi/x]$. Он показал, что в некоторой окрестности нуля разность $g(\mathbf{b},x)-(b_{m(x)}/2)\mathrm{ctg}\,(x/2)$ допускает двустороннюю оценку через функцию $\sigma(\mathbf{b},x)$ с абсолютными постоянными. В работе найдены точные значения этих постоянных на классе выпуклых последовательностей $\mathbf{b}$.

Ключевые слова: ряды по синусам с монотонными коэффициентами, выпуклая последовательность, медленно меняющаяся последовательность.

SHARP CONSTANTS IN ESTIMATE OF S. A. TELYAKOVSKII FOR THE SUM OF A SINE SERIES WITH CONVEX COEFFICIENTS [1]

A. P. Solodov (Moscow, Russia)
apsolodov@mail.ru

The sum of a sine series $g(\mathbf{b},x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$ with coefficients forming a convex sequence $\mathbf{b}$ is known to be positive on the interval $(0,\pi)$. To estimate its values near zero Telyakovskiĭ used the piecewise-continuous function $\sigma(\mathbf{b},x)=\bigl(1/m(x)\bigr)\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^2(b_k-b_{k+1})$, $m(x)=[\pi/x]$. He showed that in some neighborhood of zero the difference $g(\mathbf{b},x)-(b_{m(x)}/2)\cot(x/2)$ can be estimated from both sides in terms of the function $\sigma(\mathbf{b},x)$ with absolute constants. In the present paper, sharp values of these constants on the class of convex sequences $\mathbf{b}$ are found.

Keywords: sine series with monotone coefficients, convex sequence, slowly varying sequence.

Работа посвящена уточнению двусторонних оценок суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами, полученных С. А. Теляковским [1, 2].

Рассмотрим невозрастающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\mathbf{b}=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функцию

$$g(\mathbf{b},x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx. \tag{1}$$

Хорошо известно, что ряд (1) сходится всюду и его сумма непрерывна на $(0,2\pi)$. Нас будет интересовать поведение функции $g(\mathbf{b},x)$ вблизи

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1] The reported study was funded by RFBR, project No. 20-01-00584.

точки $x = 0$. Всюду далее помимо монотонности будем предполагать выпуклость последовательности коэффициентов ряда (1):

$$b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Положим $m(x) = [\pi/x]$, $0 < x < \pi$ ($[t]$ — целая часть числа t).

При дополнительном условии медленного изменения последовательности $\mathbf{b}$, а именно: $\lim_{k\to\infty} (b_{2k}/b_k) = 1$, С. Алянчич, Р. Боянич и М. Томич [3] нашли асимптотику суммы ряда (1):

$$g(\mathbf{b}, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x} \sim \frac{b_{m(x)}}{2} \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \to +0. \tag{2}$$

С. А. Теляковский [1, 2] заметил, что сумма ряда (1) с выпуклыми коэффициентами в правой полуокрестности нуля всегда превосходит $\bigl(b_{m(x)}/2\bigr)\,\mathrm{ctg}\,(x/2)$. Он показал, что разность

$$g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{3}$$

удобно сравнивать с функцией

$$\sigma(\mathbf{b}, x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 \Delta b_k, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1} > 0, \tag{4}$$

и что функции (3) и (4) одного порядка при $x \to +0$.

Теорема A ([2, 4]). *Существуют такие положительные абсолютные постоянные C_1 и C_2, что для разности (3) выполняется неравенство*

$$C_1\, \sigma(\mathbf{b}, x) \leqslant g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} \leqslant C_2\, \sigma(\mathbf{b}, x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{11}\right],$$

какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\mathbf{b}$.

Цель настоящей работы — получить точные постоянные в теореме A, а именно: вычислить значения величин

$$\overline{C} = \sup_{\mathbf{b}} \varlimsup_{x\to+0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sigma(\mathbf{b}, x)}, \tag{5}$$

$$\underline{C} = \inf_{\mathbf{b}} \varliminf_{x\to+0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sigma(\mathbf{b}, x)}. \tag{6}$$

Точная верхняя и нижняя грани в (5), (6) берутся по всем выпуклым и стремящимся к нулю последовательностям **b**. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\overline{C} = \frac{\pi}{2}, \qquad \underline{C} = \frac{3(\pi - 1)}{\pi^2},$$

причем точная верхняя грань в (5) и точная нижняя грань в (6) достигаются на медленно меняющихся последовательностях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Telyakovskiĭ S. A.* On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. Nouvelle serie. 1995. Vol. 58, № 72. P. 43–50.

[2] *Теляковский С. А.* К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля // Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi. 2000, 2002. T. 21, № 1–2. С. 47–53.

[3] *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. Vol. 10, № 1. P. 101–120.

[4] *Теляковский С. А.* О поведении рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами вблизи нуля // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 4. С. 462–463.