УДК 517.518.87

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПЛОТНОСТЯМИ

Ю. С. Солиев (Москва, Россия)
su1951@mail.ru

Для особых (сингулярных и гиперсингулярных) интегралов по действительной оси с периодическими плотностями построены и исследованы квадратурные формулы с узлами различной кратности.

Ключевые слова: особые (сингулярные и гиперсингулярные) интегралы, периодическая плотность, квадратурные формулы.

ON THE APPROXIMATION OF SPECIAL INTEGRALS ALONG THE REAL AXIS WITH PERIODIC DENSITIES

Yu. S. Soliev (Moscow, Russia)
su1951@mail.ru

For special (singular and hypersingular) integrals on the real axis with periodic densities, quadrature formulas with nodes of various multiplicities are constructed and investigated.

Keywords: special (singular and hypersingular) integrals, periodic densities, quadrature formulas.

Рассматриваются вопросы конечномерных аппроксимаций интегралов (см.,например, в [1])

$$A_p f = A_p(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^p} dt, p = 1, 2, ... \tag{1}$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши ($p = 1$) или конечного значения по Адамару ($p \geq 2$), $f = f(x) - 2\pi$ -периодическая плотность интегралов.

Приближенному вычислению интегралов типа (1) по отрезку действительной оси посвящены работы [1–3]. Дробно-рациональная аппроксимация и синк-аппроксимация интеграла (1) при $p = 2$ рассматривалась в работах [4] и [5] соответственно.

Ниже будем считать, что функция $f(x)$ периодически продолжена с промежутка $[0, 2\pi)$ на всю числовую ось, причем $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}(f(+0) + f(2\pi - 0))$. Если $f(x)$ имеет непрерывные производные m-го порядка, то предполагаем, что выполнены условия $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi), k = \overline{0, m}$, гладкого периодического продолжения на всю числовую ось.

Пусть $H_\alpha^{(r)}(r \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций, r-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера $H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Следуя [6], для $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ положим

$$P_N f = P_N(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (1-(1-\lambda_{k,v}^{(n)})^{l+1})(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \quad (2)$$

где

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \cos kx_j, b_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \sin kx_j, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$a_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n}\right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \cos nx_j, b_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n}\right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \sin nx_j,$$

$$x_k = x_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}, k = \overline{1,N}, n = \left[\frac{N}{2}\right], N = 1, 2, ..., l = \left[\frac{r}{2}\right],$$

$[\sigma]$ — целая часть σ, $v = \overline{1,4}$,$\lambda_{k,1}^{(n)} = 1$;$\lambda_{k,2}^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{N}$; $\lambda_{k,3}^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2} ctg \frac{k\pi}{2n+2}$;

$$\lambda_{k,4}^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+2} \cos \frac{k\pi}{n+2} + \frac{\sin \frac{k+1}{n+2}\pi}{(n+2)\sin \frac{\pi}{n+2}}, k = \overline{1,n}.$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (2), получим квадратурную формулу

$$A_p f = A_p(P_N f;x) + R_{n,v} f = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} (1-$$

$$-(1-\lambda_{k,v}^{(n)})^{l+1}) \left(a_k^{(n)} \cos\left(kx + \frac{p\pi}{2}\right) + b_k^{(n)} \sin\left(kx + \frac{p\pi}{2}\right)\right) + R_{n,v} f, \quad (3)$$

где $R_{n,v} f$ — остаточный член.

Квадратурную формулу (3) можно записать в виде

$$A_p f = A_p(P_n f;x) + R_{n,v} f =$$

$$= \frac{2}{N(p-1)!} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \sum_{j=1}^{n}{}' j^{p-1} (1-(1-\lambda_{j,v}^{(n)})^{l+1}) \cos(j(x-x_k) + \frac{p\pi}{2}) + R_{n,v} f,$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое, соответствующее значению $j = n$ при $N = 2n$ следует разделить на 2.

С помощью результатов работ [6, 7] доказывается

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in H_\alpha^{(r)} (r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1)$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка*

$$||R_{n,v}f||_C = O\left(\frac{lnN}{N^{r+\alpha-p+1}}\right), N \geq 2, r \geq 1, v = \overline{1,4}. \qquad (4)$$

Замечание 1. В квадратурной формуле (3) коэффициенты $a_k^{(n)}, b_k^{(n)}, k = \overline{1,n},$ можно заменить на коэффициенты Фурье $a_k, b_k, k = \overline{1,n},$ функции $f(x)$, причем оценка (4) для $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ $(r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1)$ остается справедливой.

Замечание 2. Если $f^{(k)}(x)$, $k = \overline{0,m}$, в точках $x_l \in (0, 2\pi)$, $l = \overline{1,q}$, имеет разрывы первого рода, то для их устранения можно воспользоваться периодическими многочленами Бернулли [8].

Замечание 3. В квадратурной формуле (3) вместо множителей $1 - (1 - \lambda_{k,v}^{(n)})^{l+1}$ можно выбрать произвольную треугольную матрицу $\mu_k^{(n)}, k = \overline{0,n}(\mu_0^{(n)} = 1)$ типа (А) ([9, с. 273]). Тогда из (3) получаются квадратурные формулы, полученные путем аппроксимации плотности интеграла (1) интерполяционным полиномом Лагранжа, дискретными аналогами отрезка ряда Фурье, сумм Бернштейна–Рогозинского, Фейера, Фавара, Коровкина, причем оценка вида (4) для них сохраняется. В случае дискретного аналога интеграла Валле-Пуссена $\left(\mu_l^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\right)$ в оценке типа (4) следует заменить N на $\sqrt{N}$.

Рассмотрим теперь квадратурные формулы с кратными узлами для интеграла (1). Пусть $p = 2$ и $H_n f = H_n(f; x)$ — тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos nx$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{1,n},$ такой, что $H_n(x_k) = f(x_k), H_n'(x_k) = f'(x_k), k = \overline{1,n}$. Известно [10], что

$$H_n f = H_n(f; x) =$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) + f'(x_k) \sin(x - x_k)) \left(\sin \frac{nx}{2} \text{cosec} \frac{x - x_k}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (5), получим квадратурную формулу

$$A_2 f = A_2(H_n f; x) + R_n f = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha(x - x_k) f(x_k) + b(x - x_k) f'(x_k)) + R_n f, \qquad (6)$$

где

$$a(t) = \frac{1}{2}\left(n(1 + \cos nt) - \sin nt * ctg\frac{t}{2}\right) \text{cosec}^2 \frac{t}{2},$$

$$b(t) = n\cos\frac{2n-1}{2}t * \mathrm{cosec}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin nt * \mathrm{cosec}^2\frac{t}{2} - n\sin nt,$$

а $R_n f = R_n(f;x)$ — остаточный член.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \le 1, r \ge 2$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (6) справедлива оценка*

$$||R_n f|| = O\left(\frac{lnn}{n^{r+\alpha-2}}\right), r+\alpha > 2.$$

Замечание 4. Аналогично (6) можно построить и исследовать квадратурные формулы с кратными узлами для интеграла (1) при $p > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения // М. : Янус-К, 2001. 508 с.

[2] *Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н.* Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Констр. теор. функц. и функц. анал. Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1987. Вып. 6. С. 3–48.

[3] *Ашур С., Шарипов Р. Н.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов Адамара // Констр. теор. функц. и функц. анал. Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1992. Вып. 8. С. 15–23.

[4] *Солиев Ю. С.* К приближенному вычислению гиперсингулярного интеграла по действительной оси // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 297–299.

[5] *Солиев Ю. С.* О синк-аппроксимации особых интегралов по действительной оси // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 57. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы XIY-й междунар. шк.-конф. Казань : Изд-во Казан. ун-т, 2019. С. 312–315.

[6] *Габдулхаев Б. Г.* Об оптимальных квадратурных формулах для сингулярных интегралов // Изв. вузов. Матем. 1978. № 3. С. 24–39.

[7] *Габдулхаев Б. Г.* Аппроксимация в Н-пространствах и приложения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1293–1296.

[8] *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М. : Наука, 1967. 500 с.

[9] *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. 688 с.

[10] *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск : Вышэйшая школа, 1968, 320 с.