УДК 517.17+517.51

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. К. Соколова (Иркутск, Россия)
98gal@mail.ru

Статья посвящена исследованию свойства периодичности функций нескольких действительных переменных. Приведены результаты автора, в которых описана структура множества периодов периодических функций нескольких переменных, изучена периодичность суммы и произведения таких функций. Сформулированы теоремы интегрального и дифференциального исчисления. Показано применение этих теорем к исследованию проблемы существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных на примере задачи Гурса для уравнения гиперболического типа.

Ключевые слова: периодическая функция, основной период, решётка периодов.

PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND THEIR APPLICATIONS

G. K. Sokolova (Irkutsk, Russia)
98gal@mail.ru

The article deals with the study of the periodicity property of functions of several real variables. A number of author's results are given. The structure of the set of periods of periodic functions of several variables is described; the periodicity of the sum and product of these functions is studied. Theorems of integral and differential calculus are formulated. It is shown that these theorems are directly applicable to the study of the existence of periodic solutions of partial differential equations. In particular, the Goursat problem for an equation of hyperbolic type is considered.

Keywords: periodic function, basic period, lattice of periods.

Построение периодических решений дифференцальных уравнений в частных производных связано с важной задачей — поиском множества периодов решения. В статье изложены элементы теории периодических функций нескольких переменных, заданных всюду на $\mathbb{R}^n$, с помощью которой установлен критерий существования периодического решения задачи Гурса и указано множество периодов искомого решения.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *периодической с периодом* $\bar{T}$, если существует ненулевой вектор $\bar{T} \in \mathbb{R}^n$, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$. Период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём *основным периодом в данном направлении* $\bar{\mathcal{T}}$ *периодической функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathcal{T}}$.

Заметим, что основной период в данном направлении имеет не любая периодическая функция. Например, функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, постоянную вдоль каждой прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, можно трактовать как периодическую с периодами $\alpha\bar{\mathcal{T}}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, среди которых нет вектора с наименьшим модулем. Следующая теорема, доказанная в работе [1], доставляет достаточные условия существования основного периода функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ в данном направлении.

Теорема 1. *Если периодическая с периодом $\bar{T}$ функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, то она имеет основной период в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.*

Одной из основных проблем теории периодических функций является описание множества периодов P_f периодической функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. В статье [2] показано, что это множество состоит из векторов

$$\bar{T}=\sum_{k=1}^{m_1} n_k\bar{T}_k+\sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}\alpha_k\bar{\mathcal{T}}_k.$$

Здесь $\bar{T}_k$ — *базисные* или *порождающие* векторы m_1*-мерной решётки* $\Lambda(\bar{T}_1,\,\bar{T}_2,\ldots,\,\bar{T}_{m_1})$ [3, стр. 13], а $\bar{\mathcal{T}}_k$ — направления, вдоль которых данная функция постоянна, числа $n_k\in\mathbb{Z}$, $\alpha_k\in\mathbb{R}$ одновременно не равны нулю, и $m_1+m_2\leqslant n$. Каждый период $\bar{T}$ периодической функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ однозначно представим в указанном виде при любых базисах m_1-мерной решётки и m_2-мерного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что справедливо представление

$$\mathrm{P}_f=\Lambda(\bar{T}_1,\,\bar{T}_2,\ldots,\,\bar{T}_{m_1})\oplus\operatorname{span}(\bar{\mathcal{T}}_{m_1+1},\,\bar{\mathcal{T}}_{m_1+2},\ldots,\bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2}).$$

Как доказано в работе [4], базисные векторы решётки $\Lambda(\bar{T}_1,\,\bar{T}_2,\ldots,\,\bar{T}_{m_1})$ являются основными периодами в своих направлениях периодической функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Обратное неверно: не всякий набор из m_1 линейно независимых основных периодов в данных направлениях периодической функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ образует базис решётки её периодов. Известно, что базис решётки определяется неоднозначно, и его образуют векторы, на которых строится так называемый *фундаментальный* параллелепипед, т. е. параллелепипед наименьшей меры Жордана (см. монографию [5]).

Доказательство следующей теоремы приведено в заметке [6].

Теорема 2. *Пусть функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ периодическая с основным периодом $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование, тогда суперпозиция $f\circ\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является периодической функцией с основным периодом $\mathcal{A}^{-1}\bar{T}_0$ в направлении $\bar{\tau}$, где $\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{T}}=|\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{T}}|\cdot\bar{\tau}$.*

Если функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ периодическая с основным периодом $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$, то, выбирая подходящим образом неособенное линейное преобразование $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ её векторного аргумента $\bar{r}\in\mathbb{R}^n$, суперпозицию $f\circ\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ можно сделать периодической функцией с основным периодом $|\bar{T}_0|\cdot\bar{\mathrm{e}}_i$ в направлении орта $\bar{\mathrm{e}}_i$, т. е. $|\bar{T}_0|$-периодической по переменной x_i. Здесь и далее $\{\bar{\mathrm{e}}_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис Гамеля в $\mathbb{R}^n$. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ постоянна в направлении $\bar{\mathcal{T}}$, то суперпозицию $f \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно сделать постоянной по x_i, т. е. не зависящей от данной переменной. Таким образом, без ограничения общности, всякую периодическую функцию n действительных переменных можно считать периодической по первым m_1 переменным, постоянной по следующим m_2 переменным и непериодической по оставшимся $n-m_1-m_2$ переменным.

В статье [7] доказан критерий периодичности суммы и произведения периодических функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а также найдены оценки множества периодов P_{f+g} и $\mathrm{P}_{f\cdot g}$. Показано, что в общем случае множества периодов P_{f+g} и $\mathrm{P}_{f\cdot g}$ разные, и содержат, по крайней мере, пересечение $\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g$.

Теорема 3. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является непрерывной по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}$ и периодической с решёткой периодов $\Lambda(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{m_1})$, порождённой векторами $\bar{T}_i = T_i\bar{\mathrm{e}}_i$, $i \in J_{m_1}$, тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{P_{J_{m_1}}} f(t_1, \ldots, t_{m_1}, x_{m_1+1}, \ldots, x_n) dt_1 \ldots dt_{m_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_1-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m_1} \prod_{i \in J_{m_1} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}} x_i \int\limits_{P_{i_1, \ldots, i_k}} S_{J_{m_1} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}} dt_{i_1} \ldots dt_{i_k} +$$

$$+(-1)^{m_1-1} \prod_{i \in J_{m_1}} x_i \;\; S_{J_{m_1}} + \varepsilon(x_1, \ldots, x_n),$$

где $P_{i_1,\ldots,i_k} = [0, x_{i_1}] \times \ldots \times [0, x_{i_k}]$ обозначает k-мерный параллелепипед, $J_{m_1} = \{1, \ldots, m_1\}$ — множество индексов, а выражение

$$S_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots,\bar{T}_{i_k})})} \int\limits_{P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots,\bar{T}_{i_k})}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$$

является средним значением по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ функции f на фундаментальном параллелепипеде $P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots,\bar{T}_{i_k})}$ решётки $\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})$ меры Жордана $\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots,\bar{T}_{i_k})})$, функция $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов P_ε таким, что $\Lambda(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \subseteq \mathrm{P}_\varepsilon$.

Теорема 4. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ является периодической с решёткой периодов, порождённой векторами $\bar{T}_x = T_x\bar{i}$ и $\bar{T}_y = T_y\bar{j}$, и имеет непрерывную смешанную производную $\partial_{xy}f$, тогда функция $\partial_{xy}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ является периодической с множеством периодов $\mathrm{P}_{\partial_{xy}f}$ таким, что $\mathrm{P}_f \subseteq \mathrm{P}_{\partial_{xy}f}$.*

Приведённые выше результаты могут быть применены к изучению проблемы существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим, например, задачу Гурса

$$u''_{xy}(x,y) = f(x,y);\ \ u(x,y)|_{y=0} = a(x),\ \ u(x,y)|_{x=0} = b(y).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть непрерывная функция* $f:\ [0;+\infty)\times[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ *является периодической с решёткой периодов* $\Lambda(\bar{T}_x,\bar{T}_y)$, *порождённой векторами* $\bar{T}_x = T_x\bar{i}$ *и* $\bar{T}_y = T_y\bar{j}$, *непрерывно дифференцируемые функции* $a:\ [0;+\infty)\to\mathbb{R}$ *и* $b:\ [0;+\infty)\to\mathbb{R}$, *периодические с периодами* T_x *и* T_y *соответственно, удовлетворяют условию* $a(0)=b(0)$. *Тогда для того, чтобы классическое решение* $u:\ [0;+\infty)\times[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ *задачи Гурса было периодическим по переменным* x *и* y, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $(x,y)\in[0;+\infty)\times[0;+\infty)$ *выполнялись условия*

$$\int\limits_0^{T_x} f(t,y)dt = \int\limits_0^{T_y} f(x,t)dt = 0,$$

причем множеством периодов этого решения является $\mathrm{P}_u = \mathrm{P}_{a+b}\cap\mathrm{P}_f$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Соколова Г. К., Орлов С. С.* Об основном периоде периодической функции нескольких переменных // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2018 : материалы междунар. конф. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2018. С. 312–315.

[2] *Соколова Г. К.* О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения 2018 : Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва ; Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[3] *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3–122.

[4] *Соколова Г. К., Орлов С. С.* Об основных периодах периодической функции нескольких переменных // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 294–297.

[5] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere Packings, Lattices and Groups. N. Y. : Springer-Verlag, 1999. 706 p.

[6] *Orlov S. S., Sokolova G. K.* Periodic function of several real variables // Surveys on Applied Industrial Mathematics. 2018. Vol. 25, № 1. P. 50–51.

[7] *Соколова Г. К.* Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных // XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам : сб. материалов междунар. конф. Секции 1–3. Симферополь : Полипринт, 2018. С. 28–31.