УДК 517.935.2

РАСШИРЕННЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Д. В. Мельничук
(Саратов, Россия)
andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru,
melnichukdv@sgu.ru

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. «Быстрый» алгоритм проверки устойчивости КДС применим лишь в случае аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. Предложен основанный на принципе аргумента расширенный алгоритм моделирования устойчивости КДС, свободный от данного ограничения.

Ключевые слова: комбинированные динамические системы, устойчивость.

ADVANCED ALGORITHM FOR MODELING STABILITY OF HYBRID DYNAMICAL SYSTEMS[1]

D. K. Andreichenko, K. P. Andreichenko, D. V. Melnichuk
(Saratov, Russia)
andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru,
melnichukdv@sgu.ru

Hybrid dynamic systems (HDS) are mathematical models in the form of systems of ordinary differential equations and partial differential equations connected by means of boundary conditions and constraint's conditions under the corresponding initial conditions. The "fast"algorithm for checking the stability of the HDS is applicable only in the case of analyticity of the characteristic and perturbing quasi-polynomials of the HDS in the right complex half-plane and near the imaginary axis. The extended algorithm of modeling of stability of HDS, based on the principle of argument, and free from this restriction is offered.

Keywords: hybrid dynamic systems, stability.

Введение

Комбинированные динамические системы (КДС) [1–3] представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. «Быстрый» алгоритм, т.е. частотный критерий, проверки устойчивости КДС [1–3] требует аналитичности характеристического и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-90017).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19-37-90017).

возмущающих квазимногочленов КДС в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси, т.е. устойчивости объектов управления с распределенными по пространству параметрами. Разомкнутая система управления может быть неустойчивой, а замкнутая — устойчивой [4]. Т.е. объект с распределенными по пространству параметрами может быть неустойчив, а КДС – устойчива. Целью работы является развитие частотного критерия устойчивости применительно к КДС подобного типа.

Алгоритмы моделирования устойчивости

Уравнения линеаризованной КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$ аналогичны [2,3]:

$$\begin{array}{c} \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{x} + C\mathbf{y} + A\mathbf{h};\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) + L_2^{(F)}\mathbf{x} + L_3^{(F)}\mathbf{y} + L_4^{(F)}\dot{\mathbf{y}},\ \mathbf{r} \in \Omega \\ (\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) + L_2^{(G)}\mathbf{y})\Big|_S = 0;\ \mathbf{h} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u})dS;\ \mathbf{y}(0) = 0,\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0 \end{array} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ – независимые пространственные координаты; $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ и $S = \partial\Omega$ – области, занимаемые объектами управления с распределенными по пространству параметрами, и их границы; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_u}$; $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_h}$; A, B, C – постоянные матрицы; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ – матрицы, которые могут зависеть от $\mathbf{r}$; $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ – линейные операторы; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t. После преобразования Лапласа $\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{C}$ (1) сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda)$, причем

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda),\ \Phi(\lambda) = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)],\ k = \overline{1, N_y},\ j = \overline{1, N_x} \quad (2)$$

$$D(\bar{\lambda}) = \overline{D(\lambda)},\ Q_{kj}(\bar{\lambda}) = \overline{Q_{kj}(\lambda)} \quad (3)$$

Здесь $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ – характеристический и возмущающие квазимногочлены, алгоритм вычисления которых приведен в [2,3]. В [3] доказаны теоремы об аналитичности функций $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ при $|\lambda| \gg 1$, $\operatorname{Re}\lambda > -|\lambda|\sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, а их аналитичность при $\lambda = \underline{\underline{O}}(1)$, $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$ проверяется численно на основе принципа аргумента [3]. Обобщенная степень $n \in \mathbb{R}$ (обычно $n = N_y$) характеристического квазимногочлена $D(\lambda)$ определяется условием [1,2]

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-n}D(\lambda) = C_a,\ 0 < |C_a| < \infty,\ \operatorname{Re}\lambda > -\infty \quad (4)$$

При аналитичности функций $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ критерий устойчивости КДС имеет вид [1, 2] $\underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\Delta} \arg D(i\omega) = n\pi/2$. Индексы k и j у функций $Q(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ далее опускаем.

Неустойчивость по одной или нескольким формам колебаний объекта с распределенными по пространству параметрами влечет наличие при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ полюсов функций $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$. Функции $\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda)$ будут аналитическими при $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, если у $D(\lambda)$ отсутствуют корни при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, полюса $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ совпадают, и порядок полюсов $Q(\lambda)$ не превосходит порядка полюсов $D(\lambda)$. Обобщенная степень $m \in \mathbb{R}$ возмущающего квазимногочлена определена аналогично (4)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-m} Q(\lambda, \mathbf{p}) = C_b(\mathbf{p}),\ 0 < |C_b(\mathbf{p})| < \infty,\ \operatorname{Re}\lambda > -\infty \tag{5}$$

Квазирациональная дробь $\Phi(\lambda, \mathbf{p}) = Q(\lambda, \mathbf{p})/D(\lambda, \mathbf{p})$ называется физически возможной, если выполнены условия (3)-(5) и условие $n > m+1$.

Рассмотрим контур

$$\begin{aligned} L_R = \{\lambda = i\omega,\ -\infty < \omega \leqslant -R\} \cup \{\lambda = Re^{i\vartheta},\ -\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2\} \cup \\ \cup \{\lambda = i\omega,\ R \leqslant \omega < \infty\},\ R \gg 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Характеристический и возмущающие квазимногочлены КДС $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны в неограниченной области правее контура (6) и в его окрестности (см. [3]). Следующие утверждения аналогичны [1, 2]

Теорема 1. *Всякая физически возможная и аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$ квазирациональная дробь (передаточная функция) $\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda)$ асимптотически устойчива.*

Теорема 2. *Если квазирациональная дробь $\Phi(\lambda)$ имеет хотя бы одну особенность при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то она неустойчива.*

Теорема 3. *Пусть квазимногочлен $D(\lambda)$ аналитичен в неограниченной области комплексной плоскости (λ) правее контура (6) и в его окрестности, и выполнены условия (3), (4). Если при монотонном движении вдоль контура (6) от точки $\lambda = R$ до точки $\lambda = i\infty$ вектор $D(\lambda)\big|_{L_R} = u + iv$ повернется на комплексной плоскости (u, iv) в положительном направлении на угол $n\pi/2$, т.е.*

$$\underset{0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2}{\Delta} \arg D(Re^{i\vartheta}) + \underset{R\leqslant\omega<\infty}{\Delta} \arg D(i\omega) = n\pi/2 \tag{7}$$

то все корни квазимногочлена $D(\lambda)$ лежат левее контура (6).

Из (1), (2) следуют уравнения для нахождения столбца матрицы передаточных функций $\Phi_j = (\Phi_{1j}(\lambda, \mathbf{p}), \Phi_{2j}(\lambda, \mathbf{p}), ..., \Phi_{N_y j}(\lambda, \mathbf{p}))^T$, $j = \overline{1, N_x}$

$$\lambda\Phi_j = B(\mathbf{p})\mathbf{e}_j^{(N_x)} + C(\mathbf{p})\Phi_j + A(\mathbf{p})\mathbf{h},\ \mathbf{h} = \textstyle\int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\lambda\mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + L_2^{(F)}\mathbf{e}_j^{(N_x)} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\Phi_j,\ \mathbf{r} \in \Omega \\ &(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) + L_2^{(G)}\Phi_j)\Big|_S = 0;\ \mathbf{e}_1^{(N)} = (1, 0, ...0)^T, ...,\ \mathbf{e}_N^{(N)} = (0, 0, ...1)^T \end{aligned} \tag{9}$$

В области, охватываемой контуром ($R \gg 1$)

$$\begin{aligned}\ell_R = \{\lambda = -\varepsilon - i\omega, -(R^2 - \varepsilon^2)^{1/2} \leqslant \omega \leqslant (R^2 - \varepsilon^2)^{1/2}\} \cup \{\lambda = \\ = Re^{i\vartheta}, -\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0\},\ \vartheta_0 = \pi/2 + \arcsin(\varepsilon/R),\ 0 < \varepsilon \ll 1\end{aligned} \tag{10}$$

передаточные функции находятся численно на основе проекционного метода Галеркина. Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r}), \mathbf{W}_k : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u},\ k = 1, 2, \ldots$ – полная система функций в области Ω; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_s), \Gamma_k : S \to \mathbb{R}^{N_G},\ k = 1, 2, \ldots$ – полная система функций на $S = \partial\Omega$. Для того, чтобы приближенно выполнить (9), полагаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}(\mathbf{r}, \lambda) \approx \textstyle\sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} v_k(\lambda)\mathbf{W}_k(\mathbf{r}),\ \lambda \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega = \int_\Omega (\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + \\ &+ L_2^{(F)}\mathbf{e}_j^{(N_x)} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\Phi_j) \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega,\ k = \overline{1, N_\Omega}, \\ &\textstyle\int_S (\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) + L_2^{(G)}\Phi_j) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS = 0,\ k = \overline{1, N_S},\ j = \overline{1, N_x}\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (8) и (11) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $\Phi_j \in \mathbb{C}^{N_y}$ и величин $v_k(\lambda),\ k = \overline{1, N_\Omega + N_S}$. Ее определитель $\mathcal{D}(\lambda)$ является полиномом по λ. Особенности передаточных функций внутри контура (10) исчерпываются корнями определителя $\mathcal{D}(\lambda)$, и проверка их отсутствия внутри контура (10) согласно принципу аргумента сводится к проверке условия

$$\underset{\lambda \in \ell_R}{\Delta} \arg \mathcal{D}(\lambda) = 2 \left(\underset{0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0}{\Delta} \arg \mathcal{D}(Re^{i\vartheta}) - \underset{0 \leqslant \omega \leqslant R}{\Delta} \arg \mathcal{D}(i\omega - \varepsilon) \right) = 0 \tag{12}$$

Расширенный алгоритм моделирования устойчивости основан на том, что физически возможная КДС, для которой выполнены условия (7) и (12), согласно теоремам 1 и 3 асимптотически устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

[2] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.

[3] *Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К.* Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217

[4] *Ким Д. П. С. М.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 288 с.