УДК 517.5

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

И. Э. Симонова, Б. В. Симонов (Волгоград, Россия)
simonova-vstu@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

Для функции двух переменных исследуются сопряженные функции по первой и второй переменной. Находятся их суммы и разности и устанавливаются оценки для производной по направлению от них.

Ключевые слова: сопряженная функция, производная по направлению, модуль гладкости.

ESTIMATES OF DIRECTIONAL DERIVATIVES OF CONJUGATE FUNCTIONS

I. E. Simonova, B. V. Simonov (Volgograd, Russia)
simonova-vstu@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

For a function of two variables conjugate function according to first and second variable are investigate. Their sums and differences are found and estimates for directional derivatives are given.

Keywords: conjugate function, directional derivative, moduli of smoothness.

Через L_p, $1 < p < \infty$, обозначается множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, $2\pi-$периодических по каждому переменному, для которых $||f||_p < \infty$, где

$||f||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$; L_p^0- множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2.

Следуя [1, 2], обозначим:

$\widetilde{f}_{x_1}$ — функцию, сопряженную функции f по x_1; тогда ее ряд Фурье

$$\sigma(\widetilde{f}_{x_1}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} B_{n_1 n_2}^{(1,0)}(f);$$

$\widetilde{f}_{x_2}$ — функцию, сопряженную функции f по x_2; тогда ее ряд Фурье

$$\sigma(\widetilde{f}_{x_2}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} B_{n_1 n_2}^{(0,1)}(f);$$

$\tilde{\tilde{f}}_{x_1 x_2}$ — функцию, сопряженную функции f и по x_1 и по x_2; тогда ее ряд Фурье

$$\sigma(\tilde{\tilde{f}}_{x_1 x_2}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} B_{n_1 n_2}^{(1,1)}(f),$$

где

$$B^{(1,0)}_{n_1n_2}(f) = a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2 - b_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2 + \\ + c_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2 - d_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2,$$

$$B^{(0,1)}_{n_1n_2}(f) = a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2 + b_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2 - \\ - c_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2 - d_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2,$$

$$B^{(1,1)}_{n_1n_2}(f) = a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2 - b_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2 - \\ - c_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2 + d_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2.$$

Введем обозначение для разностей:

$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)$ — разность положительного порядка α_1 по переменной x_1 с шагом h_1, т. е.

$$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geq 2$;

$\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)$ — разность положительного порядка α_2 по переменной x_2 с шагом h_2, т. е.

$$\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2);$$

$\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}(f)$ — полную разность с шагами h_1 и h_2 положительного порядка α функции $f \in L_p$, т. е.

$$\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\alpha}{\nu} f(x_1 + (\alpha - \nu)h_1, x_2 + (\alpha - \nu)h_2).$$

Обозначим через:

$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_p$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f \in L_p$, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_p = \sup_{|h_1|\leq\delta_1} \|\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)\|_p;$$

$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_p$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f \in L_p$, т. е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_p = \sup_{|h_2|\leq\delta_2} \|\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)\|_p;$$

$\omega_\alpha(f,\delta)_p$ — полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f\in L_p$, т. е.

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p=\sup_{|h_1|\le\delta,|h_2|\le\delta}||\Delta^\alpha_{h_1h_2}(f)||_p.$$

Приведем определение производной по направлению в смысле Вейля [2]. Пусть функция f имеет ряд Фурье

$$\sigma(f)=\sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{\nu_1\nu_2}e^{i(\nu_1x_1+\nu_2x_2)},$$

где штрих означает, что в сумме нет членов $c_{00},c_{\nu_10},\ c_{0\nu_2}$ для $\nu_i=\pm1,\pm2,...(i=1,2)$. Пусть $\overrightarrow{l}(\beta)=(\cos\beta,\sin\beta)$. Если ряд

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{k_1k_2}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}(i(k_1\cos\beta+k_2\sin\beta))^\alpha,$$

где $(ik)^\alpha=|k|^\alpha e^{i\alpha\frac{\pi}{2}k}$, $\alpha>0$, есть ряд Фурье некоторой функции, то эту функцию называют производной порядка α по направлению $\overrightarrow{l}(\beta)$ в смысле Вейля функции f и обозначают ее $f^{(\alpha,\overrightarrow{l}(\beta))}$. В случае $\overrightarrow{l}(0)=(1,0)$ производную порядка α в смысле Вейля обозначают $f^{(\alpha,0)}$. В случае $\overrightarrow{l}(\frac{\pi}{2})=(0,1)$ производную порядка α в смысле Вейля обозначают $f^{(0,\alpha)}$.

Через $C,C_1,C_2,...$ обозначим произвольные положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных формулах.

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta)$ и $G(f,\delta)$ будем писать, что $F(f,\delta)\ll G(f,\delta)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f и δ, такая, что $F(f,\delta)\le CG(f,\delta)$. Если одновременно $F(f,\delta)\ll G(f,\delta)$ и $G(f,\delta)\ll F(f,\delta)$, то будем писать, что $F(f,\delta)\asymp G(f,\delta)$.

Ниже будем рассматривать только функции из L^0_p, где $1<p<\infty$. Для таких p будут применяться следующие обозначения: $\tau=\max(p,2),\theta=\min(p,2)$.

Утверждение 1. *Ряд Фурье производной положительного порядка r по направлению $\vec{l}(\beta)=(\cos\beta,\sin\beta)$ можно представить в следующем виде:*

$$f^{(r,\vec{l}(\beta))}\sim\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{+\infty}\sum_{k_2=1}^{+\infty}\Big\langle|k_1\cos\beta+k_2\sin\beta|^r\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(k_1\cos\beta+$$

$$+k_2\sin\beta))\Big(A_{k_1k_2}(f)-B^{(1,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(k_1\cos\beta+k_2\sin\beta))\times$$

$$\times\Big(B^{(1,0)}_{k_1k_2}(f)+B^{(0,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)\Big\}+|k_1\cos\beta-k_2\sin\beta|^r\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(k_1\cos\beta-$$

$$-k_2\sin\beta))\Big(A_{k_1k_2}(f)+B^{(1,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)-$$

$$-\sin(r\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(k_1\cos\beta-k_2\sin\beta))\Big(B^{(1,0)}_{k_1k_2}(f)-B^{(0,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)\Big\}\Big\rangle.$$

Следствие. *Если $r\in\mathbb{N}$, то производная по направлению имеет следующий вид:*

$$f^{(r,\vec{l}(\beta))}=(\cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial x_2})^r(f). \qquad (1)$$

Замечание. *Из формулы (1) следует (16) из работы [3] для смешанных производных через производные по направлениям.*

Утверждение 2. *Пусть $f\in L^0_p, 1<p<\infty$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$C_1\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=0))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p\le$$

$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(0,\frac{\pi}{2})))}\|_p\le$$

$$\le C_2\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=0))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p;$$

$$C_3\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p\le$$

$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(\pi,3\frac{\pi}{2})))}\|_p\le$$

$$\le C_4C_3\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p;$$

$$C_5\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p\le$$

$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)))}\|_p\le$$

$$\le C_6\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p;$$

$$C_7\asymp\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=2\pi))}\|_p\le$$

$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(3\frac{\pi}{2},2\pi)))}\|_p\le$$

$$\le C_8\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=2\pi))}\|_p,$$

где положительные постоянные C_i $(i=\overline{1,8})$ не зависят от функции f.

Отметим, что вышеописанные неравенства понимаются так: из конечности правой части неравенства следует конечность его левой части.

Рассмотрим производные по направлениям, совпадающим с осями координат, и их связь с частными производными.

Утверждение 3. *Пусть $f\in L_p^0$, $1<p<\infty$, $r>0$, $m=1,2$. Тогда*

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}+\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\cos(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p,$$

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}-\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\sin(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p,$$

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}+\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\cos(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p,$$

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}-\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\sin(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p.$$

Для полных модулей гладкости имеют место следующие интегральные оценки.

Утверждение 4. *Пусть $f\in L_p^0$, $\alpha>0$, $r>0$, $1<p<\infty$, $\delta\in(0,1)$. Тогда*

$$\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^{\tau}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$
$$\ll\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(0))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(3\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$
$$\ll\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^{\theta}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^{\tau}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$
$$\ll\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(0))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$
$$\ll\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^{\theta}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)+\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^{\tau}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$
$$\ll\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(\pi))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(3\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$

$$\ll \Big(\int\limits_0^{\delta} \Big\{ t^{-r} \omega_{\alpha+r} \Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2}) \Big(\widetilde{f}_{x_2} - \widetilde{f}_{x_1} \Big) + \sin(r\frac{\pi}{2}) \Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2} - \widetilde{f}_{x_1}} \Big)_{x_1} \Big), t \Big)_p \Big\}^{\theta} \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\Big(\int\limits_0^{\delta} \Big\{ t^{-r} \omega_{\alpha+r} \Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2}) \Big(\widetilde{f}_{x_2} + \widetilde{f}_{x_1} \Big) + \sin(r\frac{\pi}{2}) \Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2} + \widetilde{f}_{x_1}} \Big)_{x_1} \Big), t \Big)_p \Big\}^{\tau} \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{\tau}} \ll$$

$$\ll \omega_{\alpha} \Big(\big(\widetilde{f}_{x_2} + \widetilde{f}_{x_1} \big)^{(r, \vec{l}(\pi))}, \delta \Big)_p + \omega_{\alpha} \Big(\big(\widetilde{f}_{x_2} + \widetilde{f}_{x_1} \big)^{(r, \vec{l}(3\frac{\pi}{2}))}, \delta \Big)_p \ll$$

$$\Big(\int\limits_0^{\delta} \Big\{ t^{-r} \omega_{\alpha+r} \Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2}) \Big(\widetilde{f}_{x_2} + \widetilde{f}_{x_1} \Big) + \sin(r\frac{\pi}{2}) \Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2} + \widetilde{f}_{x_1}} \Big)_{x_1} \Big), t \Big)_p \Big\}^{\theta} \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Далее рассмотрим оценки для полных модулей гладкости от производных по тем направлениям, которые отличны от осей координат. Для сокращения записи введем обозначения: ($\beta \in (m\frac{\pi}{2}, m\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$, $m = 0, 1, 2, 3$)

$$F(x_1, x_2; f, r, m, \beta) = \operatorname{sign}(\frac{1}{\sin\beta}) \cdot \widetilde{f}_{x_2} + \operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta}) \cdot \widetilde{f}_{x_1},$$

$$I(f; \alpha, r, m, \beta, \delta, s) = \Big(\int\limits_0^{\delta} \Big\{ t^{-r} \omega_{\alpha+r} \big(\cos(r\frac{\pi}{2}) \cdot F(x_1, x_2; f, r, m, \beta) -$$

$$-\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta}) \sin(r\frac{\pi}{2}) \cdot (\widetilde{F(x_1, x_2; f, r, m, \beta)})_{x_1}, t \big)_p \Big\}^{s} \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Утверждение 5. *Пусть* $f \in L_p^0$, $1 < p < \infty$, $\beta \in (m\frac{\pi}{2}, m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$, $m = 0, 1, 2, 3$; $r > 0$; $\alpha > 0$, $\delta \in (0, 1)$, $\vec{l}(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta)$. *Тогда*

$$I(f; \alpha, r, m, \beta, \delta, \theta) \ll \omega_{\alpha}(F^{(r, \vec{l}(\beta))}(x_1, x_2; f, r, m, \beta), \delta)_p \ll$$
$$\ll I(f; \alpha, r, m, \beta, \delta, \tau).$$

Теперь рассмотрим оценки частных модулей гладкости от производных по направлению, совпадающими с осями координат. Для сокращения записи введем следующие обозначения (применяются левосторонние и правосторонние пределы):

$$PF(x_1, x_2; f, r, m) = \lim_{\beta \to m\frac{\pi}{2}+0} \big(\operatorname{sign}(\frac{1}{\sin\beta}) \cdot \widetilde{f}_{x_2} + \operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta}) \cdot \widetilde{f}_{x_1} \big),$$

$$LF(x_1, x_2; f, r, m) = \lim_{\beta \to m\frac{\pi}{2}-0} \big(\operatorname{sign}(\frac{1}{\sin\beta}) \cdot \widetilde{f}_{x_2} + \operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta}) \cdot \widetilde{f}_{x_1} \big),$$

$$PI(f; \alpha, r, m, \delta, s) = \Big(\int\limits_0^{\delta} \Big\{ t^{-r} \omega_{(1 \oplus m)(\alpha+r), (0 \oplus m)(\alpha+r)} \times$$

$$\times\Big(\lim_{\beta\to m\frac{\pi}{2}+0}\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2})\cdot F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)-\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\sin(r\frac{\pi}{2})\times$$
$$\times(F(x_1,\widetilde{x_2;f},r,m,\beta))_{x_1}\Big\},t\Big)_p\Big\}^s\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

$$LI(f;\alpha,r,m,\delta,s)=\Big(\int\limits_0^{\delta}\Big\{t^{-r}\omega_{(1\oplus m)(\alpha+r),(0\oplus m)(\alpha+r)}\times$$
$$\times\Big(\lim_{\beta\to m\frac{\pi}{2}-0}\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2})\cdot F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)-$$
$$-\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\sin(r\frac{\pi}{2})\cdot(F(x_1,\widetilde{x_2;f,r},m,\beta))_{x_1}\Big\},t\Big)_p\Big\}^s\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

$\alpha>0$, $i\oplus j$ — сумма по модулю два.

Утверждение 6. *Пусть* $f\in L_p^0$, $1<p<\infty$, $\alpha>0$, $r>0$, $\delta\in(0,1)$, $m=0,1,2,3$. *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$PI(f;\alpha,r,m,\delta,\tau)\ll\omega_{(1\oplus m)\alpha,(0\oplus m)\alpha}(PF^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}(x_1,x_2;f,r,m,\beta),\delta)_p\ll$$
$$\ll PI(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,\theta),$$
$$LI(f;\alpha,r,m,\delta,\tau)\ll\omega_{(1\oplus m)\alpha,(0\oplus m)\alpha}(PF^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}(x_1,x_2;f,r,m,\beta),\delta)_p\ll$$
$$\ll LI(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,\theta).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975.

[2] *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. М. : Макс-Пресс, 2016.

[3] *Тиман М. Ф.* О разностных свойствах функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 667–676.