УДК 517.5

ОЦЕНКИ СУММ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Б. В. Симонов (Волгоград, Россия),
Т. М. Вуколова (Москва, Россия),
И. Э. Симонова (Волгоград, Россия)
simonov-b2002@yandex.ru, mvukolova@mail.ru, simonova-vstu@mail.ru

Исследованы двойные тригонометрические ряды с кратно монотонными коэффициентами. Получены необходимые условия, при которых их суммы принадлежат весовым пространствам типа Орлича.

Ключевые слова: ряды, коэффициенты рядов, кратная монотонность, последовательность, сумма.

ESTIMATES OF SUMS OF TRIGONOMETRIC SERIES IN THE SPACES WITH WEIGHT

B. V. Simonov (Volgograd, Russia),
T. M. Vukolova (Moscow, Russia),
I. E. Simonova (Volgograd, Russia)
simonov-b2002@yandex.ru, mvukolova@mail.ru, simonova-vstu@mail.ru

Double trigonometric series with multiply monotonic coefficients are investigated. Necessary conditions are found under which this sums belong to the weighted spaces of Orlich type.

Keywords: series, coefficients of series, multiply monotones, sequence, sum.

Введение

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2, \tag{1}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2, \tag{2}$$

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2, \tag{3}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2, \tag{4}$$

где для краткости положим $\cos 0\cdot x_1=\cos 0\cdot x_2=\frac{1}{2}$.

Будем считать, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют условию

$$a_{n_1n_2} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

при $n_1 \to \infty$ и любом фиксированном n_2 и при $n_2 \to \infty$ и любом фиксированном n_1. Для целых $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ обозначим

$$\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2} = \sum_{i=0}^{k_1}(-1)^i C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1+i\ n_2+j},\ \Delta_{0,0}a_{n_1n_2} = a_{n_1n_2},$$

$$\Delta_{0k_2}a_{n_1n_2} = \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1n_2+j},\ \Delta_{k_10}a_{n_1n_2} = \sum_{i=0}^{k_1}(-1)^i C_{k_1}^i a_{n_1+i\ n_2},$$

где $C_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!$. Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1n_2} \tag{6}$$

и его частичная сумма $S_{m_1m_2} = \sum\limits_{n_2=0}^{m_2}\sum\limits_{n_1=0}^{m_1} c_{n_1n_2}$.

Говорят, что ряд (6) сходится по Прингсхейму к сумме S ([1, с. 27]), если существует такое S, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа N_1 и N_2 такие, что
$|S_{m_1m_2} - S| < \varepsilon$ при любых $m_1 > N_1, m_2 > N_2$.

Из работы [2] следует, что если последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ удовлетворяет условию (5), $\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2} \geq 0$ для любых натуральных n_1 и n_2 и некоторых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$, то каждый из рядов (1) - (4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, быть может, множества плоской меры нуль. Пусть $r_1 = 1, 2,\ r_2 = 1, 2$. Через $f_{r_1r_2}(x_1, x_2)$ обозначим сумму ряда (1) при $r_1 = r_2 = 1$; сумму ряда (2) при $r_1 = 1, r_2 = 2$; сумму ряда (3) при $r_1 = 2, r_2 = 1$; сумму ряда (4) при $r_1 = r_2 = 2$.

В работе [2] устанавливается связь между поведением коэффициентов рядов (1)–(4) и принадлежностью функций $f_{11}(x_1, x_2), f_{12}(x_1, x_2), f_{21}(x_1, x_2), f_{22}(x_1, x_2)$ различным $L_{p_1p_2}$ пространствам.

Результат работы [2] является обобщением известной теоремы Харди–Литтльвуда.

В работе [3] рассмотрены оценки снизу и сверху для сумм одномерных тригонометрических рядов на классах L_φ с весом.

В данной работе доказываются оценки снизу для тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами, у которых сумма принадлежит весовому классу $L(\varphi_1, \varphi_2, w_1, w_2)$.

Для формулировки приводимых ниже результатов введем определения.

Функция $\varphi(x)$ называется почти возрастающей на (a,b) (см. [4]), если существует такая положительная постоянная C_1, что $\varphi(x_1) \le C_1\varphi(x_2)$ при любых $a < x_1 \le x_2 < b$. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на $(0,a)$ Δ_2-условию, если существует такая положительная постоянная C_2, что $\varphi(x) \le C_2\varphi(\frac{x}{2})$ для любых $0 < x < a$.

Через Φ обозначим совокупность неотрицательных на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(x)$, почти возрастающих, удовлетворяющих Δ_2 — условию и $\varphi(0) = 0$; $W-$ множество измеримых, неотрицательных почти всюду на $(0,2\pi)$ функций $w(x)$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} w(x)dx < \infty$;
$\widetilde{w}(x) = w(x)+ w(2\pi - x)$.

Пусть $\varphi_i \in \Phi, w_i \in W(i = 1,2)$. Классом $L(\varphi_1,\varphi_2,w_1,w_2)$ назовем множество измеримых функций $f(x_1,x_2)$, $2\pi-$ периодических по каждой переменной и таких, что
$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1\big(|f(x_1,x_2)|\big)dx_1\big)dx_2 < \infty.$

Ниже $C, C_1, C_2, ...-$ положительные постоянные, не обязательно одинаковые в различных формулах.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Phi$, $w_i \in W(i = 1,2)$. Пусть последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1k_2}a_{n_2n_2} \ge 0$ для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2 и любых целых неотрицательных чисел n_1 и n_2. Тогда

а) если $k_1 = 2, k_2 = 2$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1(|f_{11}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2 \ge$$
$$\ge C_1\sum_{n_2=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2^*}} \widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1^*}} \widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\Big(n_1n_2a_{n_1n_2}\Big)\Big);$$

б) если $k_1 = 2, k_2 = 3$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1(|f_{12}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2 \ge$$

$$C_2 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1^*}} \widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\Big(n_1(n_2+1)^2\Delta_{01}a_{n_1n_2}\Big)\Big);$$

в) если $k_1 = 3, k_2 = 2$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1(|f_{21}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2 \geq$$

$$C_3 \sum_{n_2=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2^*}} \widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\Big((n_1+1)^2 n_2\Delta_{10}a_{n_1n_2}\Big)\Big);$$

г) если $k_1 = 3, k_2 = 3$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1(|f_{22}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2 \geq$$

$$C_3 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\big((n_1+1)^2(n_2+1)^2\Delta_{11}a_{n_1n_2}\big),$$

где $n_i^* = \frac{12}{7}$ при $n_i = 1$ и $n_i^* = n_i$ при $n_i = 2, 3, ..(i = 1, 2)$, а положительные постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят от последовательности $\{a_{n_1n_2}\}$.

Замечание. *Если* $\varphi_1(t) = t^{p_1}$, $\varphi_2(t) = t^{\frac{p_2}{p_1}}$ $(0 < p_i < \infty)$ *и* $w_i(x_i) \equiv 1 (i = 1, 2)$, *то* $L_{\varphi_1,\varphi_2,w_1,w_2} = L_{p_1p_2}$, *и из теоремы следуют нижние оценки теоремы из работы [2].*

Вспомогательные утверждения

Пусть

$B_0^1(x) = \frac{1}{2}$; $B_n^1(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{m=0}^{n} \cos mx$ для $n \geq 1$;

$B_n^k(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} B_m^{k-1}(x)$ для $k = 2, 3, ...$ и $n = 0, 1, 2, ...$;

$\overline{B}_n^1(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} \sin(mx)$ для $n = 1, 2, ...$;

$\overline{B}_n^k(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} \overline{B}_m^{k-1}(x)$ для $k = 2, 3, ...$ и $n = 1, 2, ...$

Заметим, что $B_n^1(x)$ — это ядро Дирихле $D_n(x)$, $\overline{B}_n^1(x)$ — сопряженное ядро Дирихле $\overline{D}_n(x)$, $B_n^2(x)$ — ядро Фейера, умноженное на $n+1$.

Рассмотрим ряды:

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}\overline{B}_{n_1}^{k_1}(x_1)\overline{B}_{n_2}^{k_2}(x_2), \tag{7}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}\overline{B}_{n_1}^{k_1}(x_1)B_{n_2}^{k_2}(x_2), \tag{8}$$

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}B_{n_1}^{k_1}(x_1)\overline{B}_{n_2}^{k_2}(x_2), \tag{9}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}B_{n_1}^{k_1}(x_1)B_{n_2}^{k_2}(x_2). \tag{10}$$

Лемма 1 [2]. *Если последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}\geq 0$ для любых n_1 и n_2 и некоторых $k_1\geq 1$ и $k_2\geq 1$, то:*

а) каждый из рядов (1)–(4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, т.е. существуют функции $f_{11}(x_1,x_2)$, $f_{12}(x_1,x_2)$, $f_{21}(x_1,x_2)$, $f_{22}(x_1,x_2)$ — суммы соответствующих рядов (1)–(4);

б) каждый из рядов (7)–(10) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, к функциям $f_{11}(x_1,x_2)$, $f_{12}(x_1,x_2)$, $f_{21}(x_1,x_2)$, $f_{22}(x_1,x_2)$ соответственно.

Доказательство теоремы.

Рассмотрим сначала случай г). Из [2] следует, что $B_{n_i}^{k_i}(x_i)\geq 0$ для $k_i\geq 2$ и всех $x_i\in[-\pi,\pi](i=1,2)$. В соответствии с леммой, существует функция $f_{22}(x_1,x_2)$ и, кроме того, почти всюду $f_{22}(x_1,x_2)=\sum\limits_{n_2=0}^{\infty}\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{33}a_{n_1n_2}B_{n_1}^3(x_1)B_{n_2}^3(x_2)$. Тогда

$$I=\int\limits_0^{2\pi}w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi}w_1(x_1)\varphi_1\big(|f_{22}(x_1,x_2)|\big)dx_1\Big)dx_2=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{\pi}\widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1\big(|f_{22}(x_1,x_2)|\big)dx_1\Big)dx_2=$$

$$= \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2\Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \times$$

$$\times \Big(\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} B^3_{n_1}(x_1) B^3_{n_2}(x_2) \Big) dx_1 \Big) dx_2 \geq$$

$$\geq C \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2\Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \times$$

$$\times \Big(\sum_{n_2=m_2}^{\infty} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} B^3_{n_1}(x_1) B^3_{n_2}(x_2) \Big) dx_1 \Big) dx_2.$$

Из [5] следует, что для $\nu_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x_i \in [\frac{\pi}{\nu_i+2}, \frac{\pi}{\nu_i+1}]$ и $n_i \geq \nu_i$

$$B^3_{n_i}(x_i) \geq C_1 (n_i + 1)^3, \tag{11}$$

где C_1 не зависит от n_i и x_i $(i = 1, 2)$. Применяя неравенства (11), получим:

$$I \geq C_2 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2\Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \times$$

$$\times \Big(\sum_{n_2=m_2}^{\infty} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} (n_1+1)^3 (n_2+1)^3 \Big) dx_1 \Big) dx_2.$$

Так как

$$\sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} n_1^3 n_2^3 \geq \nu_1^2 \nu_2^2 \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty} n_1 n_2 \Delta_{33} a_{n_1 n_2} \geq$$
$$\geq \nu_1^2 \nu_2^2 \Delta_{11} a_{\nu_1 \nu_2},$$

то

$$I \geq C_3 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2\Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \Big(m_1^2 m_2^2 \Delta_{11} a_{m_1 m_2} \Big) dx_1 \Big) dx_2,$$

где положительная постоянная C_3 не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Аналогично доказывается справедливость неравенств в случаях а), б) и в).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М. : Физматгиз, 1962.

[2] *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* Оценки смешанных норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1999. № 8. С. 22–28.

[3] *Симонов Б. В.* О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Матем. 2013. № 10. С. 24–42.

[4] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Вып 5. С. 483-521.

[5] *Вуколова Т. М.* Некоторые свойства тригонометрических коэффициентов с монотонными коэффициентами : Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М. : 1989.