

## О ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ<sup>1</sup>

Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренко  
(Калуга, Россия)

evfs@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru, amm2005@rambler.ru

С использованием проекционного метода найдены моментные функции первого и второго порядка решения двумерного уравнения диффузии со случайными коэффициентами. В работе использовалась модель двумерной диффузии экситонов, возбужденных электронным пучком в полупроводниковом материале. Задача решалась в цилиндрической системе координат. Моментные функции решения уравнения диффузии экситонов (математическое ожидание и автокорреляционная функция) получены в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра.

*Ключевые слова:* диффузия, проекционный метод, моментные функции.

## THE PROJECTIVE METHOD OF FINDING THE MOMENT FUNCTIONS OF THE SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL STOCHASTIC EQUATION OF DIFFUSION<sup>1</sup>

E. V. Seregina, M. A. Stepovich,  
A. M. Makarenkov (Kaluga, Russia)

evfs@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru, amm2005@rambler.ru

Using the projection method, the first and second order moment functions of the solution of the two-dimensional diffusion equation with random coefficients are found. In this work, we used the model of two-dimensional diffusion of excitons excited by an electron beam in a semiconductor material. The problem was solved in a cylindrical coordinate system. The moment functions of the solution of the exciton diffusion equation (mathematical expectation and the autocorrelation function) are obtained in the form of a partial sum of the double Fourier series of the Laguerre orthogonal polynomial system.

*Keywords:* diffusion, projection method, moment functions.

Для наиболее полного описания математических моделей процессов, происходящих при взаимодействии электронного пучка с полупроводниковой мишенью, как правило необходимо учитывать немало случайных факторов, влияющих на формирование информативного сигнала (например, сигнала тока, индуцированного электронным пучком, сигнала катодолюминесценции и т. д.), что приводит к необходимости использования приближенных методов анализа стохастических математических моделей.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

<sup>1</sup>The article is done with the financial support of RFBR (project no. 19-03-00271), and by the Government of the Kaluga region, Russian Federation (project no. 18-41-400001).

В настоящей работе изучается нестационарная задача Коши со случайными коэффициентами для двумерного уравнения диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале. Такая задача, учитывающая специфику процессов взаимодействия заряженных частиц с полупроводниковой мишенью, ранее не рассматривалась.

Кратко опишем основные этапы построения математической модели рассматриваемого процесса. При взаимодействии пульсирующего электронного пучка с полупроводниковой мишенью в последней генерируются неравновесные ННЗ, которые диффундируют и в последующем рекомбинируют в полупроводнике. После того, как в образце установится равновесие между процессами генерации и рекомбинации, возбуждение прекращается. Характер следующего за этим нестационарного процесса диффузии ННЗ зависит в общем случае только от электрофизических параметров полупроводника: времени жизни  $\tau$  и коэффициента диффузии  $D$  ННЗ. Время действия электронного импульса во много раз больше времени установления стационарного процесса при включении или выключении электронного зонда, что даёт возможность описывать рассматриваемые процессы диффузии ННЗ следующим образом: на первом этапе — как стационарный процесс, обусловленный генерацией и рекомбинацией ННЗ, при котором мощность, рассеиваемая электронным пучком в мишени, а, значит, и число генерируемых ННЗ, есть величина постоянная, а на втором этапе, при выключении электронного зонда — как нестационарный процесс диффузии ННЗ. Это может позволить при наличии математической модели, описывающей рассматриваемое явление, на основе анализа экспериментальных данных получать оценки электрофизических параметров исследуемых полупроводниковых материалов, в общем случае путем решения соответствующей обратной задачи.

При прекращении действия электронного пучка концентрация ННЗ  $c(x, y, t)$  может быть найдена как решение нестационарного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} = D\Delta c(x, y, t) - \frac{c(x, y, t)}{\tau}$$

с начальным условием

$$c(x, y, 0) = n(x, y).$$

Здесь оси  $Ox$  и  $Oy$  прямоугольной декартовой системы координат лежат на плоской поверхности мишени,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — двумерный оператор Лапласа, а функция  $n(x, y)$  удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в со-

стоянии квазиравновесия (до выключения электронного пучка):

$$\Delta n(x, y) - \frac{n(x, y)}{\lambda^2} = -\rho(x, y).$$

Здесь  $\lambda = \sqrt{D\tau}$  — диффузионная длина ННЗ, а функция  $\rho(x, y)$  описывает концентрацию генерированных ННЗ до их диффузии в мишени.

В работах [1] и [2] рассмотрены некоторые возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования двумерной диффузии ННЗ в полупроводниковом материале, облучаемом электронным пучком, и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному уравнению диффузии.

В настоящей работе предлагается использовать проекционный метод наименьших квадратов (МНК) [3] для анализа стохастической модели диффузии и ставится задача получения оценки погрешности проекционной схемы МНК. Моментные функции концентрации экситонов (математическое ожидание и автокорреляционная функция решения уравнения диффузии) находятся в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра при условии, что коэффициент диффузии и время жизни экситонов являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону.

Построены сходящиеся матричные ряды и рассмотрена оптимизация скорости сходимости итерационных процессов, аппроксимирующих проекционные характеристики моментных функций решения уравнения диффузии экситонов. Рассмотрена также возможность использования расходящихся матричных рядов в приближенных вычислениях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Seregina E.V., Polyakov A.N., Stepovich M.A.* On the possibility of using the Galerkin projection method to simulate the two-dimensional diffusion of excitons generated by an electron beam // *Journal of Physics : Conf. Series*, 2018. Vol. 955. 012032.
- [2] *Степович М. А., Серегина Е. В., Поляков А. Н., Лямина О. И.* Об использовании метода Галеркина при математическом моделировании диффузии экситонов, вызванной пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени // *Информатика и кибернетика*. 2018. № 1 (11). С. 100–108.
- [3] *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2013. № 11. С. 65–69.