УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)
rykhlovvs@yandex.ru

Рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на положительном луче. На коэффициенты уравнения и краевых условий наложены такие условия, что отсутствует двукратная полнота корневых функций соответствующей спектральной задачи. Получены различные достаточные условия разрешимости данной задачи.

Ключевые слова: смешанная задача для гиперболического уравнения, разрешимость, существование решения, единственность решения, двукратная неполнота корневых функций.

ON THE SOLVABILITY OF THE MIXED PROBLEM FOR A CLASS HYPERBOLIC EQUATIONS IN THE ABSENCE OF COMPLETENESS OF THE ROOT FUNCTIONS

V. S. Rykhlov (Saratov, Russia)
rykhlovvs@yandex.ru

A mixed problem for a second-order hyperbolic equation with constant coefficients is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on a positive ray. Such conditions are imposed on the coefficients of the equation and the boundary conditions that there is no two-fold completeness of the root functions of the corresponding spectral problem. Various sufficient conditions for the solvability of this problem are obtained.

Keywords: mixed problem for a hyperbolic equation, solvability, existence of a solution, uniqueness of a solution, two-fold incompleteness of root functions.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для функции $u(x,t)$

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$\big(\alpha_{i1}u_x(0,t) + \alpha_{i2}u_t(0,t)\big) + \big(\beta_{i1}u_x(1,t) + \beta_{i2}u_t(1,t)\big) = 0, \ i = 1,2, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad u_t(x,0) = f_1(x), \tag{3}$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$.

Предположим, что уравнение (1) гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$, и корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенствам

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{4}$$

Требуется найти классическое решение задачи (1)–(3), то есть такую функцию $u(x,t)$, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Для нахождения классического решения задачи (1)–(3) будем использовать метод контурного интеграла или вычетный метод [1]. В последнее время большой вклад в обоснование этого метода при весьма широких предположениях внесли А.П. Хромов и его ученики [2].

Задаче (1)–(3) сопоставим спектральную задачу $L(\lambda)y = 0$ для пучка $L(\lambda)$ вида:

$$\ell(y, \lambda) := y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y, \tag{5}$$

$$U_i(y, \lambda) := \big(\alpha_{i1} y'(0) + \lambda \alpha_{i2} y(0)\big) + \big(\beta_{i1} y'(1) + \lambda \beta_{i2} y(1)\big) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Функции $y_1(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_2 x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell(x, \lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$.

Далее для определенности считаем, что $\alpha_{i1} \neq 0$ или $\beta_{i1} \neq 0$ при каждом $i = 1, 2$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются, только изменятся обозначения.

Обозначим $V_j = (v_{1j},\ v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j},\ w_{2j})^T$; $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$, где $v_{ij} = \alpha_{i1}\omega_j + \alpha_{i2}$, $w_{ij} = \beta_{i1}\omega_j + \beta_{i2}$, $j, s, k = 1, 2$.

Пусть всюду далее выполняются условия

$$a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0, \tag{7}$$

то есть справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_i(y_j, \lambda)\big)_{i,j=1}^{2} = \lambda^2 \left(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2}\right) =: \lambda^2 \Delta_0(\lambda). \tag{8}$$

и, следовательно, пучок (5)–(6) является сильно нерегулярным [3]– [4].

Из (7)–(8) следует, что краевые условия (6) (или (2)) эквивалентны полураспадающимся краевым условиям, а система корневых функций пучка (5)–(6), как показано в [5] (см. также [6]) двукратно не полна в $L_2[0, 1]$ и имеет бесконечный дефект. Условия существования и единственности решения смешанной задачи (1)–(3) при таких предположениях ранее не были получены.

Далее для краткости будем использовать обозначения: $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = x/\tau$, $\beta_x = \tau x + \tau + 1$, $c_0 = -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $e_1 = a_{\bar{1}1}/a_{\bar{1}2}$, $e_2 = a_{2\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $\gamma = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Из (8) видно, что корни уравнения $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеют вид $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_2$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для с.з. следует, что в плоскости $\mathbb{C}$ существуют такие контуры Γ_ν, которые отстоят от λ_k на расстояние не меньшее некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, а между соседними контурами лежит ровно одно λ_k. В качестве таких контуров можно взять, например, контуры $A_\nu B_\nu C_\nu D_\nu$, где $B_\nu C_\nu$ и $D_\nu A_\nu$ есть отрезки прямых $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$ ($H > 0$ достаточно большое число), а дуги $\overset{\frown}{A_\nu B_\nu}$ и $\overset{\frown}{C_\nu D_\nu}$ лежат вне δ-окрестностей с.з., являются дугами окружностей радиусов r'_ν, r''_ν, соответственно, с центрами в начале координат ($C'_1\nu < r'_\nu < C'_2\nu$, $C''_1\nu < r''_\nu < C''_2\nu$, где $C'_1, C''_1, C'_2, C''_2 > 0$ фиксированные константы) и скользят по прямым $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$.

Линеаризуем пучок (5)–(6), положив $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций (в.-ф.): $\hat{L}z = \lambda z$, где $z = (z_0, z_1)^T$ и

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix} z,\ D_{\hat{L}} = \Big\{ z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \Big| z'_0, z_1 \in L_1[0,1],$$
$$U_i(z) = 0,\ i = 1,2 \Big\},\ U_i(z) = \alpha_{i1}z'_0(0) + \alpha_{i0}z_1(0) + \beta_{i1}z'_0(1) + \beta_{i0}z_1(1).$$

С.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ [3, с. 102] совпадает с системой корневых в.-ф. $\hat{L}$.

Пусть $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}$ есть резольвента оператора $\hat{L}$ и $f = (f_0, f_1)^T$. Известно, что $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f\, d\lambda$ есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по корневым в.-ф. оператора $\hat{L}$ (производным цепочкам пучка $L(\lambda)$), соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура $\hat{\Gamma}_\nu$. Обозначим $(\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}f = \big(z_0(x,\lambda;f), z_1(x,\lambda;f)\big)^T$.

В [7] были получены необходимые и достаточные, а также простые достаточные условия разложения в.-ф. $f = (f_0, f_1)^T$ по корневым функциям пучка $L(\lambda)$.

Рассмотрим функцию

$$u(x,t) = \lim_{\nu\to\infty}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x,\lambda;f)\, d\lambda\Big), \tag{9}$$

которая является формальным решением задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (4), (7),

$$f_0^{(4)},\ f_1^{(3)} \in L_1[0,1],\ f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0,\ j = 0,1,\ s = \overline{0, 3-j}, \tag{10}$$

и, кроме того, функции f_0, f_1 удовлетворяют соотношениям

$$\big(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1\omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)\big) - p_2\big(e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + F_1(x)\big) = 0,$$
$$\big(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1\omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x)\big) - \big(e_2 f'_0(\alpha_x) - e_1 f'_0(\beta_x) + f'_0(x)\big) = 0,$$

где $F_1(x) = \int\limits_0^x f_1(\xi)\,dx$ *(здесь функции считаются продолженными нулем, если аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$*). Тогда существует единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9)*.*

Из теоремы 1 при дополнительных предположениях можно получить более простые результаты. Так, на основании [7, теорема 2], получается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (10), $e_2 = 0$ *(это эквивалентно условию* $a_{2\bar{2}} = 0$*) и функции* f_0, f_1 *удовлетворяют соотношению*

$$f_0'(x) = \omega_2 f_1(x) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{11}$$

Тогда существует единственное классическое решение $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9)*.*

При других предположениях из теоремы 1 можно получить еще и такие результаты.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (10), $e_1 = 0$ *(это эквивалентно условию* $W_1 = 0$*),* $e_2 \neq 0$ *и функции* f_0, f_1 *удовлетворяют соотношению*

$$e_2 f_0'\left(\frac{x}{\tau}\right) + f_0'(x) = e_2\omega_1 f_1\left(\frac{x}{\tau}\right) + \omega_2 f_1(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Тогда существует единственное классическое решение $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9)*.*

Следствие 1. *Пусть выполняются предположения теоремы 3 и* $|e_2| \neq \tau$*. Тогда существует единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9)*.*

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (10), $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ *и функции* f_0, f_1 *удовлетворяют соотношению* (11) *и* $f_1(x) = 0$*, (а, следовательно, и* $f_0'(x) = 0$*) для всех* $x \in [0, 1/\tau]$*. Тогда существует единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9)*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Расулов М. Л.* Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром // Матем. сб. 1959. Т. 48(90), № 3. С. 277–310.

[2] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 1. С. 18–20.

[3] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

[4] *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ. 2015. № 1(26). С. 69–86.

[5] *Рыхлов В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Математика. Механика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та , 2001. Вып.3. С. 114–117.

[6] *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.

[7] *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.