

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ В КЛАССЕ

И. И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ¹

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия),

Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)

evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

В работе исследуется инвариантность классов И. И. Привалова относительно оператора дифференцирования.

Ключевые слова: класс Привалова, гипотеза Блоха–Неванлинны, оператор дифференцирования.

ON THE DIFFERENTIATION
IN THE PRIVALOV CLASSES IN A DISK¹

E. G. Rodikova (Bryansk, Russia)

F. A. Shamoyan (Saratov, Russia)

evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

The invariance of the Privalov classes with respect to the differentiation operator is studied in this paper.

Keywords: Privalov spaces, the Bloch–Nevanlinna conjecture, differentiation operator.

Пусть \mathbb{C} — комплексная плоскость, D — единичный круг на \mathbb{C} , $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D . При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

Отметим, что классы Π_q впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [2]. При $q = 1$ они совпадают с хорошо известным классом Р. Неванлинны (см. [1]).

Предположение, известное в настоящее время как гипотеза Блоха–Неванлинны, было явно сформулировано в работе Р. Неванлинны в 1929 г., и состояло в следующем: производная любой аналитической в единичном круге функции ограниченной характеристики является функцией ограниченной характеристики. Наиболее известный результат, опровергающий эту гипотезу, принадлежит О. Фростману (см. [4]). Он доказал, что существует произведение Бляшке, производная которого не

¹Первый автор поддержан грантом РФФИ, научный проект № 18-31-00180 мол-а
Второй автор поддержан грантом РФФИ, научный проект №17-51-15005-НЦНИ

¹The work was financially supported by Russian Foundation for Fundamental Research (projects 18-31-00180 and 17-51-15005).

является функцией с ограниченной характеристикой. Вопросы инвариантности относительно интегро-дифференциальных операторов других классов аналитических функций исследовались многими математиками. Краткий обзор результатов в этом направлении содержится в работе С.В. Шведенко [3].

Сформулируем гипотезу Блоха-Неванлинны в классах И.И. Привалова: каково бы ни было $q > 0$ производная любой аналитической в единичном круге функции из класса Π_q принадлежит классу Π_q .

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *В классах И.И. Привалова Π_q ($0 < q < +\infty$) гипотеза Блоха-Неванлинны неверна.*

Таким образом, установлено, что классы Π_q не инвариантны относительно оператора дифференцирования не только при $q = 1$, но и при всех $0 < q < +\infty$. Отметим, что метод доказательства этого утверждения восходит к работе У. Хеймана [5].

Естественно возникает вопрос, какому классу будет принадлежать производная функции из пространства И.И. Привалова.

При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И. И. Привалова по площади:

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $0 < q < +\infty$. Если $f \in \Pi_q$, то $f' \in \tilde{\Pi}_q$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.
- [2] *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций М. : Изд-во МГУ, 1941. 206 с.
- [3] *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23, С. 3–124.
- [4] *Frostman O.* Sur les produits des Blaschke // Kungl. Fysiografiska Sallskapet i Lund Forhandlingar 1942. Vol. 12, № 15. P. 169–182.
- [5] *Hayman W.K.* On the characteristics of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals // Acta. math. 1964. Vol. 112, № 3–4. P. 181–214.