УДК 517.977, 519.7

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. А. Постнова (Москва, Россия)

postnova@ipu.ru

В работе исследовалась задача оптимального управления для систем дробного порядка с сосредоточенными и распределенными параметрами. В первом случае исследование проводилось на примере двойного интегратора. Во втором случае изучалось подвижное управление для системы описываемой уравнением типа уравнения диффузии с дробной производной по времени. В обоих случаях использовался метод l-проблемы моментов. Для двойного интегратора точно решена линейная двумерная проблема моментов, а для системы с распределенными параметрами исследована нелинейная бесконечномерная проблема моментов, для которой получено решение в рамках конечномерной аппроксимации.

Ключевые слова: оптимальное управление, l-проблема моментов, дробная производная.

OPTIMAL MOTION CONTROL OF FRACTIONAL ORDER SYSTEMS WITH CONCENTRATED AND DISTRIBUTED PARAMETERS

E. A. Postnova (Moscow, Russia)

postnova@ipu.ru

The optimal control problem for fractional order systems with concentrated and distributed parameters was investigated. In the first case, the study was conducted on the example of a double integrator. In the second case, movable control was studied for a system described by an equation of the diffusion equation type with a fractional derivative in time. In both cases, the l-moment problem method was used. For double integrator parameters, the linear two-dimensional moment problem is precisely solved, and for a system with distributed parameters, the nonlinear infinite-dimensional moment problem is investigated, for which a solution is obtained in the framework of a finite-dimensional approximation.

Keywords: optimal control, l-problem of moments, fractional derivative.

Введение

Сравнительно недавно в моделировании динамических систем с управлением стали использовать интегро-дифференциальное исчисление дробного порядка (дробное исчисление) [1]. Этот математический аппарат позволяет учитывать наличие нелокальных пространственных и временных зависимостей. Например, в вязкоупругих системах, в физике фрактальных сред и т.д. В данной работе основное внимание уделяется исследованию систем дробного порядка с сосредоточенными и распределенными параметрами. В качестве системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами была выбрана линейная система — двойной интегратор. При этом управление задавалось в виде существенно ограниченной функции. Такая модель используется для реальных систем, когда управляющее воздействие осуществляется с помощью переключателей (реле). В качестве системы с распределёнными параметрами рассматривается система, описываемая уравнением диффузии с дробной производной по времени и для неё исследуется задача подвижного управления.

1. Система с сосредоточенными параметрами

Двойной интегратор математически описывается системой уравнений следующего вида:

$$
\begin{aligned}
{}_{t_0}D_t^{\rho_1} q_1(t) &= q_2(t), \\
{}_{t_0}D_t^{\rho_2} q_2(t) &= u(t),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где функции $q_1(t), q_2(t)$ и $u(t)$ определяют состояние и управление соответственно; $t \in (t_0, T]$, $T > t_0 > 0$. Управление $u(t)$ считается элементом пространства $L_\infty(t_0, T]$. Оператор дробного дифференцирования ${}_{t_0}D_t^{\rho_i}$, в формуле (1) понимается в смысле Хильфера [2]. Индекс ρ_i в первом случае является составным, $\rho_i = (\alpha_i, \mu_i)$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $\mu_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$. Начальные условия для системы (1) задаются в виде:

$$
\lim_{t \to t_0+} \left[{}_{t_0}I_t^{\sigma_i} q_i(t) \right] = s_i^0, i = 1, 2. \tag{2}
$$

Конечные условия для системы (1) задаются в виде:

$$
q_i(T) = q_i^T, i = 1, 2. \tag{3}
$$

Задача оптимального управления: найти управление $u(t)$, переводящее систему (1) из заданного начального состояния, определяемого условиями (2), в заданное конечное состояние (3), и имеющее минимальную норму $\|u(t)\|$ при заданном времени управления $T - t_0$ (времени перехода системы из начального состояния в конечное). Здесь $\|u(t)\| = \operatorname{vrai\,max}_{t \in (t_0, T]} u(t)$. Можно показать [3], что поставленная задача оптимального управления для исследуемой системы (1) сводится к l-проблеме моментов [4]. В свою очередь, l-проблема моментов для системы (1) сводится к задаче поиска минимума следующей функции [5]:

$$
F(\xi_2) = \int_{t_0}^{T} \left| \frac{1 - c_2 \xi_2}{c_1} g_1(\tau) + \xi_2 g_2(\tau) \right| d\tau, \tag{4}
$$

где $\xi_2 \in (-\infty, \infty)$ — действительная переменная, $c_{1,2}$ — моменты, определяемые из конечных и начальных условий.

Теорема 1. *Функция $F(\xi_2)$, определяемая формулой (4) может достигать своего минимума в точках, лежащих только на следующих интервалах:*

$$\xi_2 \in \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, \frac{1}{c_2}\right) \quad \text{при } c_1 < 0,\ c_2 > 0, \xi_2 \in \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, 0\right) \quad \text{при } c_1 > 0,\ c_2 < 0,$$

$$\begin{gathered} \xi_2 \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, \infty\right) \quad \text{при } c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_2 - kc_1 > 0, \\ \xi_2 \in \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, 0\right) \quad \text{при } c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_2 - kc_1 < 0, \\ \xi_2 \in (-\infty, 1/c_2) \cup (0, \infty) \quad \text{при } c_1 < 0,\ c_2 < 0,\ c_2 - kc_1 < 0, \\ \xi_2 \in \left(0, \frac{1}{c_2 - kc_1}\right) \quad \text{при } c_1 < 0,\ c_2 < 0,\ c_2 - kc_1 > 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$k = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)} (T - t_0)^{-\alpha_1} & \text{для системы Хильфера,} \\ \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\ln \frac{T}{t_0}\right)^{-\alpha_1} & \text{для системы Адамара} \end{cases}$$

В работе построено решение проблемы моментов, позволяющее вычислить оптимальное управления для системы (1) и исследовано поведение этого решения при варьировании параметров, начальных и конечных условий.

2. Система с распределенными параметрами

В качестве динамической системы дробного порядка с распределенными параметрами рассматривается такая система, поведение которой описывается уравнением типа уравнения диффузии следующего вида:

$${}_0D_t^\alpha Q(x,t) = K \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), t > 0, 0 < x < L,$$

где функции $Q(x,t) \in AC(0,T] \times (0,L]$ и $u(x,t) \in L_p(0,T]$, $p > 1$ определяют состояние и управление системы соответственно; K — коэффициент диффузии; ${}_0D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Капуто [1] порядка α, $0 < \alpha < 1$. Начальное и конечное условия задавались следующим образом:

$$Q(x,0) = Q_0(x), Q(x,T) = Q^*(x), T > 0.$$

В случае подвижного управления функция управления $u(x,t)$ будет иметь следующий вид:

$$u(x,t) = I(t)\psi[x - x_0(t), \sigma(t)],$$

где функция $I(t) \in L_p[0,T]$ определяет интенсивность управляющего воздействия; функция $\psi[x - x_0(t), \sigma(t)]$ отвечает за форму пространственного распределения управляющего воздействия, при этом $\sigma(t)$ является параметром формы распределения, а $x_0(t) \in L_p[0,T], 1 < p < \infty$ задаёт закон движения управляющего воздействия.

Задача оптимального управления ставится аналогично случаю систем с сосредоточенными параметрами, где отличие заключается лишь в определении управляющего воздействия. В свою очередь задача подвижного управления сведена к нелинейной бесконечномерной проблеме моментов следующего вида:

$$\int_0^T g_n(t,T)I(t)X_n[x_0(t)]dt = Q_n^* - Q_{0n}E_\alpha(-\mu_n T^\alpha),$$

где $g_n(t,T) = -\mu_n E_{\alpha,\alpha}[-\mu_n(T-t)^\alpha](T-t)^{\alpha-1}$; $X_n[x_0(t)]$ и μ_n — собственные функции и собственные значения соответсвующей краевой задачи, Q_n и Q_0n — коэффициенты разложения соответствующих величин по системе собственных функций.

Заключение

Задачу оптимального управления системы с распределенными и сосредоточенными параметрами можно решать аналогично, сводя к l-проблеме моментов. Отличие будет заключаться в форме проблемы моментов (линейная конечномерная или нелинейная бесконечномерная соответственно). Для системы с сосредоточенными параметрами (двойного интегратора) были получены точные и приближённые аналитические решения задачи оптимального управления в ряде частных случаев и приведены результаты некоторых численных расчётов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kilbas A. A., Srivastava H. M.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam : Elsevier, 2006.

[2] *Hilfer R.* Fractional time evolution. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore : World Scientific, 2000.

[3] *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.

[4] *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. М. : Наука, 1975. 568 с.

[5] *Постнова Е. А.* Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором дробного порядка // Проблемы управления. 2018. № 2. С. 40–46.