УДК 517.518.4

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ L^∞-НОРМЫ СУММЫ РЯДА ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ $\{b_k\}$ ЧЕРЕЗ l^∞-НОРМУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{kb_k\}$[1]

Е. Д. Алферова, А. Ю. Попов (Москва, Россия)
elena.alferova@gmail.com

Доказана теорема о двусторонней оценке L^∞-нормы суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами через l^∞-норму $\{kb_k\}$: $C_0\|b\| \le \|g(b,\cdot)\| \le C_1\|b\|$.

Константа C_1 найдена точно. Константа C_0 точно не указана, но ее значение найдено с точностью 0.2.

Ключевые слова: двусторонняя оценка, ряды по синусам, монотонные коэффициенты.

TWO-SIDED ESTIMATES FOR L^∞-NORM OF SINE SERIES WITH MONOTONE COEFFICIENTS $\{b_k\}$ IN TERMS OF l^∞-NORM OF $\{kb_k\}$ SEQUENCE[1]

E. D. Alferova, A. Yu. Popov (Moscow, Russia)
elena.alferova@gmail.com

Two-sided estimates for L^∞-norm of sine series with monotone coeffcients $\{b_k\}$ in terms of l^∞-norm of $\{kb_k\}$ sequence are obtained. We proved that $C_0\|b\| \le \|g(b,\cdot)\| \le C_1\|b\|$, where C_1 we found exactly, and C_0 we could't find. But we showed that is between 0.53 and 0.73.

Keywords: two-sided estimate, sine series, monotone coefficients.

Рассмотрим ряды по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = g(b,x), \tag{1}$$

последовательности коэффициентов которых $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ монотонны:

$$b_1 > 0,\ b_{k+1} \le b_k\ \ \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{2}$$

Множество всех последовательностей $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию (2), обозначим $\mathbb{M}$. Ряды (1) с коэффициентами из $\mathbb{M}$ сходятся в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а суммы их непрерывны на интервалах $(2\pi m, 2\pi(m+1)), m \in \mathbb{Z}$. Ввиду нечетности и 2π-периодичности синуса сумму ряда (1) достаточно исследовать на интервале $(0,\pi)$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project No. 20-01-00584.

Если для рядов по синусам общего вида (сходящихся всюду или почти всюду) найти критерий ограниченности их сумм в терминах последовательностей коэффициентов вряд ли возможно, то для сумм рядов (1) с коэффициентами из множества $\mathbb{M}$ такой критерий выглядит довольно просто.

Теорема A. (см. [1, §7, теорема 7.27; 2, гл. V, теорема 1.3]) *Сумма ряда (1) с коэффициентами из $\mathbb{M}$ ограничена на $\mathbb{R}$ (или, что то же самое, ограничена на $(0,\pi)$) тогда и только тогда, когда ограниченной является последовательность $\{kb_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

В связи с приведенным критерием возникает вопрос об оценке друг через друга норм

$$\|g(b,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(b,x)| = \sup_{0<x<\pi}|g(b,x)| = \|g(b,\cdot)\|_{L^\infty(0,\pi)} \qquad (3)$$

и

$$\|b\| = \sup_{k\in\mathbb{N}}(kb_k) \qquad (4)$$

(поскольку $b\in\mathbb{M}$, то в определении этой нормы модуль можно не ставить). Насколько известно авторам, этот вопрос в математической литературе не рассматривался. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для нормы суммы ряда по синусам (1), последовательность коэффициентов b которого лежит в $\mathbb{M}$, справедлива следующая двусторонняя оценка*

$$C_0\|b\| \le \|g(b,\cdot)\| \le \left(\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt\right)\|b\|, \qquad (5)$$

где

$$C_0 = \max_{x\in[\pi,\frac{5\pi}{4}]}\left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{1-\cos t}{t}dt\right), \qquad (6)$$

если хотя бы одна из величин (3) или (4) конечна.

Замечание 1. Константа $\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt$ в неравенстве (5) является точной, поскольку (см. [3, т.2, стр. 89, № 23]) выполняется равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\max_{x\in[0,\pi]}\sum_{k=1}^n\frac{\sin(kx)}{k} = \int\limits_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt.$$

Замечание 2. Точная константа C в оценке снизу $C\|b\| \le \|g(b,\cdot)\|$ нами не найдена, но зазор между ней и ее оценкой снизу C_0 не очень велик. С одной стороны, верно численное неравенство $C_0 > 0.53$, с другой стороны, имеем

$$C \le C_1 = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) < 0.73.$$

Действительно, сопряженные ядра Дирихле

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \tag{7}$$

являются рядами по синусам с монотонными коэффициентами и норма (4) последовательности коэффициентов функции $\widetilde{D}_n$ равна n. Максимумы же функций (7) на отрезке $[0,\pi]$, как нетрудно убедиться, находятся на отрезке $[0,\frac{2\pi}{n+1}]$ и имеют асимптотику $C_1 n$ при $n\to\infty$.

Также нами был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}$. *Положим* $\beta = \overline{\lim_{k\to+\infty}}\, kb_k$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\overline{\lim_{x\to 0+}}\, g(b,x) \ge \overline{\lim_{x\to 0+}}\, \frac{1}{x}\int_0^x g(b,t)dt \ge C_0\beta, \tag{8}$$

где постоянная C_0 *определена равенством (6).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Boas R. P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. N. Y. : Springer-Verlag Inc., 1967. 616 p.

[2] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М : Мир, 1965. 616 с.

[3] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы анализа. М. : Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1978. 432 с.