УДК 517.977, 519.7

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С. С. Постнов (Москва, Россия)

postnov.sergey@inbox.ru

В работе рассматриваются две задачи оптимального управления для систем с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается линейными интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача быстродействия при заданном ограничении на норму управления. При этом анализируются случаи, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера, Эрдейи-Кобера, Катугамполы, Сайго и Атанганы-Балеану. Эти задачи сведены к l-проблеме моментов, для которой получены условия корректности и разрешимости. В ряде случаев получены аналитические решения поставленных задач оптимального управления и исследованы их свойства, а также проведено сравнение свойств решений, получаемых для операторов дробного дифференцирования разного типа.

Ключевые слова: оптимальное управление, l-проблема моментов, дробная производная.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR THE SYSTEMS, MODELED BY FRACTIONAL-ORDER EQUATIONS WITH MULTI-PARAMETRIC DERIVATIVES

S. S. Postnov (Moscow, Russia)

postnov.sergey@inbox.ru

In this paper two optimal control problems considered for the systems with lumped parameters which dynamics described by linear fractional-order integro-differential equations: the problem of control search with minimal norm at given control time and the problem of time-optimal control search at given constraint on control norm. Herewith several cases analyzed when fractional differentiation operator defined in sense of Hilfer, Erdélyi-Kober, Katugampola, Saigo or Atangana-Baleanu. These problems reduced to l-problem of moments. There are conditions of correctness and solvability obtained for the problem. In some cases analytical solutions of optimal control problems derived and its properties studied. Comparison of these properties evaluated in cases corresponding to different types of fractional derivative operator.

Keywords: optimal control, l-problem of moments, fractional derivative.

Введение

Исследование систем дробного порядка с управлением и, в частности, задач оптимального управления такими системами представляет собой относительно новое и активно развивающееся направление. Заметный рост количества публикаций по данной тематике начался в 2000-х гг. и продолжается поныне. В настоящее время для данного класса систем уже известен ряд базовых результатов, таких, например, как вывод уравнений

Эйлера-Лагранжа, решение задач оптимального управления с квадратичным функционалом качества, доказательство аналога принципа максимума Л. С. Понтрягина и др. [1–4]. В работах [3, 5, 7] для решения задач оптимального управления системами дробного порядка при явных ограничениях на норму управления был применён метод моментов.

Следует отметить, что большинство полученных на сегодня результатов (включая вышеперечисленные) относятся к системам, описание которых даётся уравнениями дробного порядка с производной Капуто или Римана-Лиувилля. Заметно меньше работ посвящено рассмотрению производных других типов, например Рисса или Адамара. В то же время, в литературе известно несколько десятков альтернативных определений дробной производной, на основе которых строятся модели реальных физических, биологических и экономических систем. Для таких систем актуальны и задачи управления, в том числе оптимального, что делает необходимым исследования задач оптимального управления для моделей с другими типами дробной производной.

В настоящей работе исследуются задачи оптимального управления для линейных систем с сосредоточенными параметрами, модели которых формулируются в терминах интегро-дифференциальных уравнений с многопараметрическими производными. Данный тип производных отличается от "простых" однопараметрических производных не просто наличием дополнительных параметров у оператора дифференцирования, но и тем, что при определённых их значениях многопараметрическая производная сводится к одной из однопараметрических. Т.е., многопараметрические производные объединяют в себе сразу несколько однопараметрических и, следовательно, обладают большей универсальностью.

1. Постановка задачи

Пусть функции $q(t)$ и $u(t)$ определены на полуинтервале $t \in (t_0, T]$ и задают соответственно состояние системы и управление. Будем рассматривать линейные системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами, динамика которых определяется уравнениями следующего вида:

$$
{}_{t_0}D_t^{\sigma} q(t) = a(t)q(t) + b(t)u(t), \tag{1}
$$

где ${}_{t_0}D_t^{\sigma}$ – левосторонний оператор дробного дифференцирования, $t \in (t_0, T]$, $a(t)$ и $b(t)$ – некоторые известные непрерывные функции времени. В работе рассматриваются случаи, когда оператор ${}_{t_0}D_t^{\sigma}$ понимается в смысле Хильфера, Катугамполы, Эрдейи-Кобера, Сайго или Атанганы-Балеану. Системы, которые описываются уравнением (1) с одним из перечисленных операторов дробного дифференцирования далее называются соответственно системами Хильфера, Катугамполы, Эрдейи-Кобера, Сайго или Атанганы-Балеану. Показатель дробного дифференцирования σ является составным и подразумевает набор из двух или трех чисел. Допустимые управления $u(t)$ считаются элементами пространства $L_p(t_0, T]$, $p > 1$.

Для системы (1) задаются начальные условия следующего вида:

$$\lim_{t \to t_0+} [{}_{t_0}I_t^{\sigma} q(t)] = s^0(t_0), \tag{2}$$

где ${}_{t_0}I_t^{\sigma}$ – оператор дробного интегрирования. Конечные условия для системы (1) задаются в виде:

$$q(T) = q^T(T). \tag{3}$$

Исследуются следующие две задачи оптимального управления.

Задача А. *Найти управление $u(t)$, $t \in (t_0, T]$, такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3) и при этом норма управления в пространстве $L_p(t_0, T]$, $p > 1$ достигла минимального значения, когда значения t_0 и T заданы.*

Задача Б. *Найти управление $u(t) \in L_p(t_0, T]$, $t \in (t_0, T]$, такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3) и при этом время управления $T - t_0$ было минимальным при условии $\|u\| \leq l$, $l > 0$, где l задано.*

В работе демонстрируется, что задачи А и Б для уравнений с производными вышеуказанных типов сводятся (аналогично работам [3, 5, 7]) к l-проблеме моментов [4].

2. Исследование l-проблемы моментов

В данном разделе приведены основные результаты, касающиеся вопросов корректности и разрешимости l-проблемы моментов, а также её решения для уравнений с производными разного типа.

Теорема 1 [9]. *Пусть задана система (1), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера с показателем $\sigma = (\alpha, \mu)$, а функции $a(t)$ и $b(t)$ не зависят от времени. Тогда l-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима, если выполнено следующее условие:*

$$\alpha > \frac{1}{p}. \tag{4}$$

.

Теорема 2 [10]. *Пусть задана система* (1), *в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Эрдейи–Кобера с показателем* $\sigma = (\alpha, \beta, \delta)$. l*-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима в следующих случаях:*

- *для* $a = 0$, $b = 1$ *при выполнении условий*

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + 1) > \frac{1}{p}; \tag{5}$$

- *для* $a = \lambda t^{\beta\delta}$, $b = t^{\beta\delta}$ $(\lambda \neq 0)$ *при выполнении условий*

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + \delta + 1) > \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть задана система* (1) *при* $a(t) = 0$, $b(t) = 1$, *в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Катугамполы [11] с показателем* $\sigma = (\rho, \alpha)$. l*-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима при выполнении следующих условий:*

$$\alpha > \frac{1}{p}, \quad \rho > p. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть задана система* (1) *при* $a(t) = 0$, $b(t) = 1$, *в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Атанганы–Балеану [12] с показателем* α. l*-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима при выполнении условия:*

$$\alpha > \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Замечание 1. Аналогичные результаты можно получить и для систем Сайго и Фабрицио–Капуто. Последний тип наряду с производной Атанганы–Балеану представляет отдельный интерес, поскольку относится к так называемым дробным операторам с несингулярным ядром.

Замечание 2. В тех случаях, когда l-проблема моментов является корректной и разрешимой для неё можно построить точное решение, представляющее собой оптимальное управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Agrawal O. P.* A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlin. Dyn. 2004. Vol. 38. P. 323–337.

[2] *Tricaud C., Chen Y. Q.* Time-Optimal Control of Systems with Fractional Dynamics // Int. J. Diff. Eq. 2010. Vol. 2010. PaperID 461048.

[3] *Mozyrska D., Torres D. F. M.* Modified Optimal Energy and Initial Memory of Fractional Continuous-Time Linear Systems // Signal Proc. 2011. Vol. 91, № 3. P. 379–385.

[4] *Kamocki R.* Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. Vol. 37, № 11. P. 1668–1686.

[5] *Постнов С. С.* Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с помощью метода моментов // Проблемы управления. 2012. № 5. С. 9–17.

[6] *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.

[7] *Постнов С. С.* Задачи оптимального управления для линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Адамара // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 2. С. 143–147.

[8] *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. М. : Наука, 1975. 568 с.

[9] *Постнов С. С.* Задачи оптимального управления для некоторых линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Хильфера // Проблемы управления. 2018. № 5. С. 14–25.

[10] *Постнов С. С.* l-Проблема моментов для одномерных линейных интегро-дифференциальных уравнений с операторами Эрдейи–Кобера // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 6. С. 659–662.

[11] *Katugampola U. N.* Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations. arXiv:1411.5229v2. 2016 (9 pages).

[12] *Jarad F., Abdeljawad T., Hammouch Z.* On a class of ordinary differential equations in the frame of Atangana–Baleanu fractional derivative // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. Vol. 117. P. 16–20.