УДК 517.518.862

О НЕРАВЕНСТВЕ В. В. АРЕСТОВА

Н. В. Попов (Москва, Россия)
popov.niikita@gmail.com

В неравенстве $\int_{\mathbb{T}}\varphi(|D^\alpha t_n(x)|)dx \le \int_{\mathbb{T}}\varphi(\tilde{\varkappa}\cdot|t_n(x)|)dx$ изучается наилучшая константа $\tilde{\varkappa}$, где $\varphi(x)$ — функция класса Арестова. В частности, для величины $\varkappa(\alpha,n,p) = \sup\limits_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv 0}\frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}$ справедливо: для любых $\alpha\in\mathbb{R}$ и $p\in[0;+\infty]$ справедливо $\varkappa(\alpha,1,p)=1$, для $n=2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9$ и для любых $\alpha\in\{1,2,\ldots,2n-3\}\cup[2n-2,\infty)$ и $p\in[0;+\infty]$ справедливо $\varkappa(\alpha,n,p)=n^\alpha$.

Ключевые слова: неравенство Бернштейна, класс Арестова, дробная производная.

ABOUT THE V. V. ARESTOV INEQUALITY

N. V. Popov (Moscow, Russia)
popov.niikita@gmail.com

In the inequality $\int_{\mathbb{T}}\varphi(|D^\alpha t_n(x)|)dx \le \int_{\mathbb{T}}\varphi(\tilde{\varkappa}\cdot|t_n(x)|)dx$, the best constant $\tilde{\varkappa}$ is studied, where $\varphi(x)$ belongs to Arestov class function.

In particular, for the value $\varkappa(\alpha,n,p) = \sup\limits_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv 0}\frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}$ we have the following: for any $\alpha\in\mathbb{R}$ and $p\in[0;+\infty]$, $\varkappa(\alpha,1,p)=1$; for $n=2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9$ and for any $\alpha\in\{1,2,\ldots,2n-3\}\cup[2n-2,\infty)$ and $p\in[0;+\infty]$, $\varkappa(\alpha,n,p)=n^\alpha$.

Keywords: Bernstein's inequality, Arestov class, fractional derivative.

Введение

Пусть $\mathbb{T}=(-\pi;\pi]$ – тор, $L_p(\mathbb{T})$, $p\ge 1$ — пространство суммируемых в p-ой степени функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Рассмотрим функционал $\|\cdot\|_p$, $0\le p\le+\infty$. Для $0<p<+\infty$ считаем, что он определён формулой (1). Для крайних p полагаем

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_C = \max_{x\in\mathbb{T}}|f(t)|,$$
$$\|f\|_0 = \lim_{p\to 0+}\|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(t)|\,dt\right).$$

Ниже мы будем рассматривать данный функционал на пространстве тригонометрических полиномов.

Исследуется задача о нахождении наилучшей константы $\varkappa(\alpha, n, p)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha t_n\|_p \leq \varkappa(\alpha, n, p) \, \|t_n\|_p, \quad p \in [0, \infty],$$

где D^α— оператор дробно-линейного дифференцирования для $\alpha \geq 0$. Исследовалась величина

$$\varkappa(\alpha, n, p) = \sup_{t_n \in \tau_n, t_n \not\equiv 0} \frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}. \tag{2}$$

Данная величина исследовалась во многих работах в более общем виде, отметим некоторые последнии работы [3], [4].

Основные результаты

Определение. *Определим класс функций Арестова. Будем писать* $\varphi \in A$, *если* $\varphi \in AC[a, b], \forall [a, b] \subset (0, \infty)$, *и* $\varphi(s), s \cdot \varphi'(s)$ *- неубывающие функции. Рассмотрим наименьшую положительную константу* $\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi)$ *для которой справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|D^\alpha t_n(x)|) dx \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(\tilde{\varkappa} \cdot |t_n(x)|) dx. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть* $\varphi \in A$, $t \in T_n$.*При* $n = 1$ *выполнено* $\tilde{\varkappa}(\alpha, 1, \varphi) = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. *При* $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *для любого* $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$, $p \in [0; +\infty]$ *справедливо* $\tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi) = n^\alpha$.
Следствие. *Пусть либо* $n = 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$, *либо* $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *и* $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$. *Тогда справедливо* $\|D^\alpha t_n\|_p \leq n^\alpha \, \|t_n\|_p, \quad p \in [0, \infty]$.

Данный результат согласуется с работой [4]. В которой получены следующие оценки: $\varkappa(\alpha, 2, 0) = 2^\alpha$, для $\alpha = \{1\} \cup [2, \infty)$. $\varkappa(\alpha, 2, 0) > 2^\alpha$, для $\alpha = [0; 1) \cup (1; 2)$.

Автором ранее анонсировался результат при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ в работе [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Арестов В. В.* О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.

[2] *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 3–22

[3] *Glazyrina P. Yu.* Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // Journal of Approximation Theory. 2010. Vol. 162. C. 1204–1210.

[4] *Арестов В. В., Глазырина П. Ю.* Неравенство Бернштейна-Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.

[5] *Kozko A. I.* The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 391416.

[6] *Козко А. И.* О неравенстве Арестова–Бернштейна–Сёге для тригонометрических полиномов. // Чебышёвский сборник. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе. 2015. Т. 16, № 4, С. 68–71.

[7] *Сегё Н.* Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.

[8] *Попов Н. В.* О неравенстве С. Н. Бернштейна // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 249–252.