УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, Россия)

polovinkin.es@mipt.ru

Рассмотрен пример экстремальной задачи Майера, в которой функционал задается на семействе траекторий некоторого дифференциального включения с псевдо-липшицевой неограниченной и невыпуклозначной правой частью. Для этой задачи сравниваются различные необходимые условия оптимальности решения.

Ключевые слова: необходимые условия оптимальности, полярные конусы, условие псевдо-липшицевости.

ON AN EXAMPLE OF AN EXTREMAL PROBLEM WITH DIFFERENTIAL INCLUSION [1]

E. S. Polovinkin (Moscow, Russia)

polovinkin.es@mipt.ru

An example of the Mayer extremal problem is considered, in which the functional is defined on the family trajectories of some differential inclusion with pseudo-Lipschitz unbounded and nonconvex right-hand side. For this problem, various necessary conditions for optimality of the solution are compared.

Keywords: necessary optimality conditions, polar cones, pseudo-Lipschitz condition.

Введение. Задача Майера и необходимые условия оптимальности

В докладе автор опирается на прямой вариационный метод доказательства необходимых условий в задаче Майера, полученный им в работах [1, 2]. В работе [2] доказаны необходимые условия, включающие в себя сопряженное дифференциальное включение Эйлера, график которого является некоторым нормальным конусом. При этом мы используем более узкий нормальный конус, чем нормальный конус Кларка или даже частично овыпукленный предельный нормальный конус (см. [3]).

Напомним некоторые понятия и утверждения. Пусть задано многозначное отображение $F\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ и рассмотрим дифференциальное включение

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п.в. } t \in T := [t_0, t_1]. \tag{1}$$

Для любого $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ обозначаем множество всех F-траекторий $x \in AC(T, \mathbb{R}^n)$ дифференциального включения (1) на интервале T при условии, что $x(t_0) \in C_0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00209а).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No 18-01-00209a).

Рассмотрим экстремальную задачу Майера на отрезке $T := [t_0, t_1]$:

$$\text{Minimize}\,\{\varphi(x(t_1)) \mid x \in \mathcal{R}_T(F, C_0);\ x(t_1) \in C_1;\ C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^n\}. \qquad (2)$$

Эта задача состоит в нахождении минимума заданной локально липшицевой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ на множестве концевых точек всех F-траекторий дифференциального включения (1), у которых начальные значения $x(t_0)$ выбираются из $C_0 \subset \mathbb{R}^n$, а концевые значения $x(t_1)$ выбираются из подмножества $C_1 \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть некоторая F-траектория $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ является решением данной экстремальной задачи (2). Приведем локальные условия на отображение F в задаче (2) около кривой $\widehat{x}$:

Гипотеза 0 (измеримость). Многозначное отображение $F\colon T \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-измеримым и для каждого $t \in T$ множество Graph $F(t, \cdot)$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Гипотеза 1 (псевдо-липшицевость). Существуют число $\varepsilon \in (0, 1)$, функция $l \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, $l(t) > 0$ п.в., и измеримая функция $R : T \to (0, +\infty]$ такие, что для каждой пары точек (t, x_1), (t, x_2) из трубки $W := \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \|x - \widehat{x}(t)\| \le \varepsilon\}$ справедливо включение

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}, \qquad (3)$$

где по определению

$$G(t, x) := F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0)). \qquad (4)$$

Гипотеза 2 (невырожденность). Для функций l и R, заданных в гипотезе 1, существует число $\nu \in (0, \frac{1}{\varepsilon})$ такое, что при почти всех $t \in T$ справедливо неравенство $l(t) \le \nu\, R(t)$.

Определение 1. *Отображение $F\colon T \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ называется измеримым псевдо-липшицевым около F - траектории $\widehat{x}$ если существуют числа $\nu > 0$ и $\varepsilon \in (0, \min\{1; \frac{1}{\nu}\})$, а также функции l и R, при которых справедливы гипотезы 0 - 2 .*

Рассмотрим также следующее предположение.

Гипотеза 3. Для заданных отображения F и F-траектории $\widehat{x}$ существует многозначное измеримое отображение $K : T \rightsquigarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, значения которого являются замкнутыми выпуклыми конусами, удовлетворяющее для почти всех $t \in T$ включениям

$$\begin{aligned} &T_C(\text{Graph }\ F(t, \cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}\,'(t))) \\ &\qquad \subset K(t) \subset T_L(\text{Graph }\ F(t, \cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}\,'(t))). \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь определение касательного конуса Кларка T_C смотрите в [4], §2.4, а определение нижнего касательного конуса T_L смотрите в [5].

Теорема 2.([2]) *Пусть траектория $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ является локальным решением исходной проблемы Майера (2). Пусть отображение F является измеримым псевдо-липшицевым около кривой $\widehat{x}$ (см. определение 1). Пусть конусы $K(t)$ удовлетворяют гипотезе 3. Пусть K_0 и K_1 некоторые шатры Болтянского ко множествам C_0 и C_1 в точках $\widehat{x}(t_0)$ и $\widehat{x}(t_1)$ соответственно. Пусть задана выпуклая положительно однородная функция ψ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая неравенству $D_L^+\varphi(\widehat{x}(t_1))(x) \leq \psi(x) < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда существуют число $\lambda \geq 0$ и кривая $p \in AC(T, \mathbb{R}^n)$ такие, что выполнены: 1) условия нетривиальности: $\lambda + \|p\|_{AC} > 0$, 2) условия трансверсальности:*

$$p(t_0) \in K_0^0, \quad -p(t_1) \in K_1^0 + \lambda \partial\psi(0), \tag{6}$$

3) кривая p удовлетворяет дифференциальному включению Эйлера:

$$(p'(t), p(t)) \in K^0(t), \quad \text{при п.в. } t \in T, \tag{7}$$

где K_0^0, K_1^0, $K^0(t)$ - суть полярные конусы ко множествам K_0, K_1, $K(t)$ соответственно.

Пример

Предметом нашего доклада является следующий пример задачи Майера (2). Пусть размерность пространства $n = 1$, а интервал времени $T := [0, 1]$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ такова, что $f(x) = f(-x)$ для $x \in \mathbb{R}^1$ и $f(x) = 1/2$ для x, у которых $|x| \geq 1$. При $x \in [0, 1]$ функция f является непрерывной кусочно аффинной (ломаной) функцией со счетным числом сегментов, при этом график функции заключен между параболой $y = x^2/2$ и прямой $y = 0$ с угловыми точками на этих двух кривых. Все сегменты этой кусочно аффинной функции имеют углы наклона с осью Ox равными $\pm\pi/4$, и при убывании аргумента x от 1 до 0 знаки углов чередуются. Пусть также выбрана такая функция $l \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^1_+)$, $l(t) > 0$, которая не ограничена на любом открытом интервале.

Определим отображение $F(t, x) := l(t)\{y \in \mathbb{R}^1 \mid f(x) \leq y \leq x^2\} \cup \{y \in \mathbb{R}^1 \mid y \geq 2x^2\}$ для $t \in [0, 1]$ и $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда при любом выборе чисел $\nu > 0$, $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{1}{4}, \frac{1}{\nu}\})$ и функции $R(t) \geq \nu l(t)$ отображение F является измеримым псевдо-липшицевым около $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Задача Майера состоит в минимизации значений $x(1)$ по всем траекториям дифференциального включения $x' \in F(t, x)$, удовлетворяющим начальному условию $x(0) = 0$. Очевидно, что $\widehat{x}(t) \equiv 0$ является решением этой задачи.

Легко проверить, что нижний касательный конус ко множеству Graph $F(t,\cdot)$ в точке 0 равен следующему: $T_L(\text{Graph } F(t,\cdot);0) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$. Выбирая $K(t) := T_L(\text{Graph } F(t,\cdot);0)$, вычислим его полярный конус, а именно: $K^0(t) = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid q = 0,\, p \leq 0\}$. Таким образом, необходимые условия (7) (дифференциальное включение Эйлера) принимают простую форму: $p'(t) = 0$, $p(t) = \text{Const} \leq 0$. Из условий трансверсальности получаем $\lambda = 1$ и $p(t) \equiv -1$.

В свою очередь, легко проверить, что предельный нормальный конус ко множеству Graph $F(t,\cdot)$ в точке 0 для п.в. $t \in [0,1]$ имеет вид: $N^L_{\text{Graph } F(t,\cdot)}(0) = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid |q| + l(t)p \leq 0\} \cup \{(q,p) \mid q = 0, p \geq 0\}$. По теореме 3.1.1 [3] необходимые условия в виде дифференциального включения Эйлера для кривой p имеет более сложный вид : или $|p'(t)| + l(t)p(t) \leq 0$ п.в., или $p(t) = \text{Const} \geq 0$ п.в.

В итоге показали, что в указанном примере необходимые условия, полученные в работе [2], записанные через полярные конусы, дают более точные необходимые условия по сравнению с другими необходимые условиями, известными в литературе (например, в [3, 6, 7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Polovinkin E. C.* On Continuous Variations of Trajectories of Differential Inclusion with Unbounded Right-Hand Side // Optimization. 2019. P. 1–26. DOI: https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1626385

[2] *Половинкин Е. С.* Прямой метод Понтрягина для оптимизационных задач с дифференциальным включением. // Тр. Матем. инст. им. В.А.Стеклова РАН. 2019. Т. 304. С. 257–272.

[3] *Clarke F. H.* Necessary Conditions in Dynamic Optimization. Providence : AMS, 2005. 113 p.

[4] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука. 1988.

[5] *Aubin, J. P. and H. Frankowska.* Set-Valued Analisys. Boston ; Basel ; Berlin : Birkhäuser. 1990.

[6] *Vinter R. B.* Optimal Control. Boston : Birkhäuser, 2000.

[7] *Mordukhovich B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I, II.* Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1