УДК 517.9

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

А. В. Подорога (Москва, Россия)
anastasiapodoroga@gmail.com

Рассматривается задача Коши для квазилинейного закона сохранения с кусочно линейной функцией потока. Выделен специальный класс кусочно постоянных решений. Поставлен вопрос об устойчивости таких решений по малым возмущениям функции потока. Указаны специальные предположения, при которых удается получить желаемую оценку устойчивости. Доклад будет дополнен результатами численного моделирования по обсуждаемой теме.

Ключевые слова: квазилинейный закон сохранения, кусочно линейная функция потока, обобщенные решения, оценка устойчивости.

ON THE SOLUTIONS STABILITY IN THE CAUCHY PROBLEM FOR THE QUASILINEAR CONSERVATION LAWS

A. V. Podoroga (Moscow, Russia)
anastasiapodoroga@gmail.com

We discuss the Cauchy problem for a quasi-linear conservation law with a piecewise linear flow function. A special class of piecewise constant solutions is considered. The question of stability of solutions for small perturbations of the flow function is raised. We introduce special assumptions, under which it is possible to obtain the stability estimate. The talk will be supplemented with the results of numerical simulation.

Keywords: quasilinear conservation law, piecewise linear flow function, generalized solutions, stability estimate.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Задача (1), (2) активно используется в теоретических и численных исследованиях, связанных с квазилинейными дифференциальными уравнениями (см. [1–10]). При этом *функция потока* $f(u)$ часто предполагается выпуклой вверх или вниз (см. [1, 4–6]). Сейчас мы не налагаем такого ограничения (см. также [2, 9]).

Выберем специальный класс кусочно линейных функций потока $f(u)$ и класс кусочно постоянных начальных условий $\varphi(x)$ с конечным набором значений $E(\varphi) \subset \mathbb{R}$. При таких ограничениях единственное обобщенное энтропийное решение $u = u(x,t)$ задачи Коши (1), (2) также будет кусочно постоянным (см. [8–10]), а каждая кривая сильного разрыва решения должна удовлетворять условиям Гюгонио и Олейник.

Так, если $x = \xi(t)$ — кривая сильного разрыва обобщенного решения $u = u(x,t)$ со значениями

$$u^+ = u(\xi(t)+0,t), \qquad u^- = u(\xi(t)-0,t)$$

справа и слева от разрыва, то условие Гюгонио (см. [3–6]) имеет вид

$$\xi'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}. \tag{3}$$

Соответственно, условие Олейник [2] означает, что

$$(f(u) - l(u))(u^+ - u^-) \geqslant 0 \tag{4}$$

для любого численного значения u, находящегося между u^+ и u^-. При этом $l(u)$ есть уравнение секущей, соединяющей на плоскости (u, f) точки графика $(u^+, f(u^+))$ и $(u^-, f(u^-))$. Всюду в дальнейшем стандартные соглашения (3), (4) считаем выполненными.

Так как $\varphi(x)$ есть кусочно постоянная функция с конечным множеством значений $E(\varphi)$, то существуют такие $\varphi_{\min}$, $\varphi_{\max} \in E(\varphi)$, что

$$\varphi_{\min} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\max}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Решение задачи Коши (1), (2) подчинено тем же ограничениям

$$\varphi_{\min} \leqslant u(x,t) \leqslant \varphi_{\max}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В силу ограничений (5) функцию потока $f(u)$ будем рассматривать лишь на отрезке $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$. Обсудим, что происходит с решением $u = u(x,t)$ при возмущении $f(u)$ на этом отрезке.

Отметим типичный пример. Для одной и той же начальной функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2c, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{6}$$

с фиксированным значением $c > 0$ возьмем функцию потока

$$f(u) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 2c, \tag{7}$$

и возмущенную функцию $f_\varepsilon(u)$, не сильно отличающуюся от первой

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot u, & 0 \leqslant u \leqslant c, \\ 2\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot u, & c \leqslant u \leqslant 2c, \end{cases} \tag{8}$$

Обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с начальным условием (6) и функцией потока (7) очевидно имеет вид

$$u(x,t) \equiv \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{9}$$

С другой стороны, решение $u_\varepsilon(x,t)$, отвечающее тому же начальному условию (6) и функции потока (8) имеет вид

$$u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 2c, & x < -\dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t, \\ c, & -\dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t < x < \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t, \\ 0, & x > \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t, \end{cases} \tag{10}$$

Условия (3), (4) для решения (10) проверяются непосредственно.

Несмотря на очевидную близость функций потока (7) и (8) (при малых значениях $\varepsilon > 0$), решения (9) и (10) заметно различаются. Например, в любой момент времени $t = t^* > 0$ имеется точка $x^* = \varepsilon t^*/(2c)$, в которой разность между $u_\varepsilon(x,t)$ и $u(x,t)$ оказывается равной $c > 0$. При этом значение $c > 0$ является достаточно большим, как бы мы ни выбирали малое $\varepsilon > 0$.

Дадим теперь оценку, позволяющую измерить отклонение решений двух задач при специальных возмущениях функций потока. Пусть множество абсцисс $M = M(f)$ точек излома функции $f(u)$ включает в себя всё множество значений $E(\varphi)$ начальной функции $\varphi(x)$, но, кроме того, может содержать и другие точки из $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$. Пусть множество абсцисс $M_1 = M(f_1)$ точек излома функции $f_1(u)$ включает в себя множество M и содержит также другие точки из $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$, т. е.

$$E(\varphi) \subset M \subset M_1.$$

Пусть Δ — максимальное расстояние между соседними точками из множества M. Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ и $u_1(x,t)$ — обобщенные решения задач Коши (1), (2) с одним и тем же начальным условием и функциями потока $f(u)$ и $f_1(u)$ соответственно. Если функции $f(u)$ и $f_1(u)$ удовлетворяют перечисленным выше требованиям, то для любых x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ и любого момента времени $T > 0$ справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} (u(x,T) - u_1(x,T))dx \right| \leqslant (L + L_1)T\Delta. \tag{11}$$

Здесь $L = L(f)$ и $L_1 = L(f_1)$ — константы Липшица функций $f(u)$ и $f_1(u)$ соответственно.

Оценка (11) включает в себя важный параметр Δ, оценивающий мелкость разбиения функции потока $f(u)$ на кусочно линейные участки по оси u. Если величина Δ достаточно мала, т. е. функция $f(u)$ состоит из большого числа малых звеньев, то и величина интегрального отклонения $u_1(x,t)$ от $u(x,t)$ в формуле (11) на протяжении длительного времени остается достаточно малой.

Данный принцип можно использовать при аппроксимации более сложных кусочно гладких функций потока посредствам многозвенных кусочно линейных функций $f(u)$. В докладе будут представлены результаты численных расчетов применительно к нескольким важным квазилинейным уравнениям математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.

[2] *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.

[3] *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Наука, 1978. 688 с.

[4] *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка : учебн. пособие. М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

[5] *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

[6] *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М. ; Ижевск : НИЦ «РХД», 2010. 296 с.

[7] *Гасников А. В.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учебн. пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

[8] *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Метод движения разрывов для специальных квазилинейных уравнений // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 242–245.

[9] *Подорога А. В.* Особенности моделирования решений квазилинейного закона сохранения с невыпуклой функцией потока // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2018. Вып.19. С. 85–92.

[10] *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Сравнительный анализ различных численных методов для квазилинейного уравнения дорожного движения // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 2. С. 154–179.