УДК 517.518

МНОЖЕСТВА ТИПА КАНТОРА И РЯДЫ ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА[1]

М. Г. Плотников, В. С. Асташонок (Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com, AstashonokV1998@gmail.com

А. А. Шнейдер доказал, что если F_ζ — симметричное совершенное множество с постоянным отношением ζ, то при $\zeta = 1/2^{n+1}$ $(n \in N)$ оно является U-множеством для системы Уолша. Мы изучаем вопрос, являются ли множества F_ζ с $\zeta = 1/p^n$ множествами Дирихле и U-множествами для систем Виленкина–Крестенсона на p-ичных группах.

Ключевые слова: системы Виленкина–Крестенсона, множества типа Кантора, множества Дирихле, U-множества.

CANTOR TYPE SETS AND SERIES ON THE VILENKIN–CHRESTENSON SYSTEMS[2]

M. G. Plotnikov, V. S. Astashonok (Vologda, Russia)
MGPlotnikov@gmail.com, AstashonokV1998@gmail.com

A. A. Šneider has proved that if F_ζ is the symmetric perfect set with the constant ratio ζ then for $\zeta = 1/2^{n+1}$ $(n \in N)$ F_ζ is a U-set for the Walsh system. We study the question of whether the sets F_ζ with $\zeta = 1/p^n$ are Dirichlet sets and U-sets for the Vilenkin–Chrestenson systems on the p-adic groups.

Keywords: Vilenkin–Chrestenson systems, Cantor type sets, Dirichlet sets, U-sets.

Пусть $\zeta \in (0, 1/2)$ и F_ζ — симметричное совершенное множество с постоянным отношением ζ (множество канторовского типа). Одна из замечательных теорем теории тригонометрических рядов состоит в том, что *F_ζ является множеством единственности для тригонометрической системы тогда и только тогда, когда ζ^{-1} есть число Пизо* (Н. К. Бари — случай рациональных ζ, результат работ Р. Салема, А. Зигмунда и И. И. Пятецкого–Шапиро — общий случай, см. [1, гл. 14, §§ 18, 19]). Напомним, что если $\{f_n\}$ — система функций, заданных на нормированном пространстве X, то множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, *U-множеством*) для системы $\{f_n\}$, если из сходимости ряда $\sum a_n f_n(x)$ к нулю на $X \setminus A$ вытекает, что все $a_n = 0$.

Один из результатов работы А. А. Шнейдера [2] состоит в том, что *при $\zeta = 1/2^{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$, F_ζ является U-множеством для системы Уолша.* На текущий момент это единственный результат о множествах F_ζ как U-множествах для системы Уолша.

В [3] Д. С. Харрис уточнил результат А. А. Шнейдера, заметив, что на двоичной группе множества $F_{1/2^{l+1}}$ являются множествами Дирихле

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[2]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

для системы Уолша и даже подгруппами меры Хаара нуль. Напомним, что если на множестве X задана система функций $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, то множество $A \subset X$ называют *множеством Дирихле* для системы $\{g_n\}$, если $\liminf\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |1 - g_n(x)| = 0$. Ранее К. Йонеда установил [4], что любая подгруппа меры Хаара нуль двоичной группы является множеством Дирихле, а всякое множество Дирихле, в свою очередь, U-множеством для системы Уолша. В [3] результат К. Йонеды был распространен на системы характеров произвольных нульмерных компактных абелевых групп G, а в [5] рассматривались множества Дирихле и их обобщения на произведениях G^d таких групп G, и было установлено, что все они являются U-множествами для широкого класса сходимостей.

Фиксируем произвольное $p \in \{2, 3, \ldots\}$ и рассмотрим *p-ичную группу Виленкина* $\mathbb{G}_p$, т.е. множество последовательностей $g = (g_0, g_1, \ldots)$, $g_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ с групповой операцией покоординатным сложением по модулю p. Сюръективное отображение $\phi\colon\ g \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{g_k}{p^{k+1}}$ переводит группу $\mathbb{G}_p$ в отрезок $[0, 1]$. Множества вида

$$\Delta_k^{m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}} = \left\{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}_p\colon\ g_s = m_{k-1-s},\ s = \overline{0, k-1}\right\} \qquad (1)$$

образуют счетную базу топологии в $\mathbb{G}_p$, являясь одновременно замкнутыми и открытыми множествами в этой топологии. Образами таких множеств при отображении ϕ являются замкнутые p-ичные интервалы $\left[m/p^k;\ (m+1)/p^k\right]$, $m = \sum\limits_{j=0}^{k-1} m_j p^j$, в связи с чем множества (1) также называют *p-ичными интервалами* (ранга k).

$\mathbb{G}_p$ является компактной абелевой группой, группу характеров которой образует *система Виленкина–Крестенсона* $\{VC_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемая следующим образом. Если $R_k(g) := \exp(2\pi i g_k/p)$ — *обобщённые функции Радемахера* на $\mathbb{G}_p$, $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k p^k$ $(n_k \in \{0, \ldots, p-1\})$, то *функция Виленкина–Крестенсона* VC_n (в нумерации Пэли) есть

$$VC_n(g) = \prod_{k=0}^{\infty} (R_k(g))^{n_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i g_k n_k}{p}\right). \qquad (2)$$

При $p = 2$ система $\{VC_n\}$ совпадает с *системой Уолша.*

Лемма 1 (см. [1, гл. 14, § 18]).

$$F_\zeta = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigsqcup_{m=1}^{2^s-1} \left[\sum_{j=1}^{s} \left(\zeta^{j-1} - \zeta^j\right) m_{s-j},\ \zeta^s + \sum_{j=1}^{s} \left(\zeta^{j-1} - \zeta^j\right) m_{s-j}\right]. \qquad (3)$$

Здесь $m=\sum\limits_{j=1}^{s-1} m_j 2^j$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{0}:=0$. *Как следствие,*

$$F_{1/p^l}=\bigcap_{s=0}^{\infty}\bigsqcup_{m=1}^{2^s-1}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{p^l-1}{p^{lj}}\right)m_{s-j},\ \frac{1}{p^{ls}}+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{p^l-1}{p^{lj}}\right)m_{s-j}\right]. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned} F_{1/p^l}=&\{z=(z_0,z_1,\ldots)\in G_p\colon \\ &z_{sl}=z_{sl+1}=\ldots=z_{(s+1)l-1}=0\vee(p-1),\ s=0,1,\ldots\}, \end{aligned} \qquad (5)$$

причем выбор $0\vee(p-1)$ свой для каждого s. Отметим, что из (5) видно, что F_{1/p^l} является подгруппой группы G_p тогда и только тогда, когда $p=2$.

Отметим, что каждое множество $F^{(s)}_{1/p^l}$ в формуле (4) является объединением 2^s p-ичных интервалов ранга ls. В связи с этим мы перенесем множества $F^{(s)}_{1/p^l}$ с отрезка $[0,1]$ на группу $\mathbb{G}_p$, сделав это таким образом, что прообразом $F^{(s)}_{1/p^l}$ будет объединение 2^s соответствующих p-ичных интервалов на группе $\mathbb{G}_p$. Попутно отметим, что в работе [6] для системы Уолша доказано (Теорема A 2.47), что замкнутое множество является U-множеством на группе $\mathbb{G}_p$ тогда и только тогда, когда $\phi(E)$ является U-множеством на отрезке $[0,1]$. Этот результат несложно распространить и на системы Виленкина–Крестенсона.

Теорема 1. *Если* $\zeta=1/p^l$, $l\in\mathbb{N}$, $l\geq 2$, *то* F_ζ *является множеством Дирихле и* U*-множеством для системы Виленкина–Крестенсона.*

Доказательство. Из (2) и (5) видно, что всякая функция

$$VC_{n(s)}=\prod_{j=sl}^{(s+1)l-1}R_j^{\alpha_j}\colon\ \sum_{j=sl}^{(s+1)l-1}\alpha_j=p,$$

обладает тем свойством, что $VC_{n(s)}(g)=1$ для каждого $g\in F_{1/p^l}$. Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty}\sup_{g\in F_{1/p^l}}|1-VC_n(g)|=0$$

и F_{1/p^l} является множеством Дирихле для системы $\{VC_n\}$. С учетом теоремы 1 из [3], F_{1/p^l} есть U-множество. Теорема доказана.

Теорема 2. *Множество* $F_{1/p}$, $p\geq 3$, *не является множеством Дирихле и даже не представимо в виде счетного объединения множеств Дирихле для системы* $\{VC_n\}$.

Доказательство. Формула (5) влечет

$$F_{1/p} = \{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = 0 \vee (p-1),\ k = 0, 1, \ldots\}. \tag{6}$$

Предположим, что $F_{1/p} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, где E_j — множества Дирихле для системы $\{VC_n\}$. Фиксируем произвольное $E_j =: E$. Рассмотрим произвольную непустую порцию множества $F_{1/p}$ вида $F_{1/p} \cap \Delta$, Δ — p-ичный интервал. В этом случае найдутся натуральное l и $\widehat{g}_k \in \{0, p-1\}$, $k = 0, \ldots, l-1$, такие, что

$$\Delta = \{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = \widehat{g}_k,\ k = 0, \ldots, l-1\}. \tag{7}$$

Так как E — множество Дирихле для системы $\{VC_n\}$, найдется возрастающая последовательность $\{n(s)\}$ такая, что

$$VC_{n(s)}(g) = 1 \quad \text{для каждого } g \in E. \tag{8}$$

Выберем достаточно большое s, чтобы $n := n(s) \in \left[p^L; p^{L+1} - 1\right]$ для некоторого $L \geq l$. Рассмотрим p-ичные интервалы ранга $L+1$:

$$\Delta^1 = \left\{g \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = \widehat{g}_k,\ k = \overline{0, l-1};\ \ g_k = 0,\ k = \overline{l, L-1};\ \ g_L = 0\right\};$$

$$\Delta^2 = \left\{g \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = \widehat{g}_k,\ k = \overline{0, l-1};\ \ g_k = 0,\ k = \overline{l, L-1};\ \ g_L = p-1\right\}.$$

Из (2) видно, что на Δ^1 и Δ^2 функция VC_n принимает постоянные значения

$$\prod_{k=0}^{l-1} \exp\left(\frac{2\pi i \widehat{g}_k n_k}{p}\right) \quad \text{и} \quad \prod_{k=0}^{l-1} \exp\left(\frac{2\pi i \widehat{g}_k n_k}{p}\right) \cdot \exp\left(\frac{2\pi i (p-1) n_L}{p}\right),$$

соответственно. Так как $n_L \neq 0$, в силу того, что $n \in \left[p^L; p^{L+1} - 1\right]$, эти значения различны. Значит, как минимум одно из них не равно единице. Поэтому как минимум один из p-ичных интервалов Δ^1 или Δ^2 имеет пустое пересечение с E, в силу (8). Значит, в любой непустой порции множества $F_{1/p}$ лежит p-ичный интервал, не содержащий точек из E. Это означает, что E нигде не плотно в $F_{1/p}$.

Итак, $F_{1/p}$ есть счетное объединение нигде не плотных множеств, что противоречит теореме Бэра. Противоречие доказывает теорему.

Замечание. Если $p \geq 3$, то, в отличие от случая $p = 2$, множество $F_{1/p}$ не является подгруппой меры Хаара нуль группы $\mathbb{G}_p$ и даже не представимо в виде счетного объединения таких подгрупп. Этот факт вытекает из теоремы 2 и результатов работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 937 с.

[2] *Шнейдер А. А.* О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24(66), № 2. С. 279–300.

[3] *Harris D. C.* Sets of uniqueness and closed subgroups in Vilenkin groups // Anal. Math. 1990. Т. 16, № 2. С. 115–122.

[4] *Yoneda K.* Perfect sets of uniqueness on the group 2^{ω} // Canad. J. Math. 1982. Т. 34, № 3. С. 759–764.

[5] *Plotnikov M.* $\mathcal{V}$-sets in the products of zero-dimensional compact abelian groups // European J. Math. 2019. Т. 5, № 1. С. 223–240.

[6] *Плотников М. Г.* Квазимеры, обобщенные интегралы и хаусдорфовы меры в теории рядов Хаара и Уолша. Вологда, 2011. 221 с.