УДК 517.518

АНАЛИЗ НА P-ИЧНЫХ ГРУППАХ[1]

М. Г. Плотников (Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com

Рассмотрены представления p-ичных групп G, а также рядов по системам характеров G (системам Виленкина–Крестенсона). Построены новые примеры U-множеств для систем Виленкина–Крестенсона.

Ключевые слова: p-ичные группы, системы Виленкина–Крестенсона, p-ичные графы, p-ичные мартингалы, U-множества.

ANALYSIS ON THE P-ADIC GROUPS[1]

M. G. Plotnikov (Vologda, Russia)
MGPlotnikov@gmail.com

Various representations of the p-adic groups G, as well as series on the systems of characters of G (Vilenkin–Chrestenson systems), are considered. New examples of U-sets for the Vilenkin–Chrestenson systems are constructed.

Keywords: p-adic groups, Vilenkin–Chrestenson systems, p-adic graphs, p-adic martingales, U-sets.

1. Основные определения и обозначения

Всюду $\mathbb{N}$ означает множество целых неотрицательных, $\mathbb{C}$ — комплексных чисел. Для натурального q положим $\mathbb{N}(q) := \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Фиксируем произвольное $p \in \{2, 3, \ldots\}$ и рассмотрим *p-ичную группу* $\mathbb{G} = \mathbb{G}_p$, т.е. множество последовательностей $g = (g_0, g_1, \ldots)$, $g_k \in \mathbb{N}(p)$, с групповой операцией покоординатным сложением по модулю p. Отображение $\phi\colon\ g \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{g_k}{p^{k+1}}$ переводит $\mathbb{G}$ в отрезок $[0, 1]$, а множества

$$\Delta_k^m := \left\{ g \in \mathbb{G}\colon\ g_s = m_{k-1-s},\ s = \overline{0, k-1} \right\}, \quad m = \sum_{j=0}^{k-1} m_j p^j \qquad (1)$$

— в замкнутые интервалы $\left[m/p^k;\ (m+1)/p^k\right]$. Множества (1) называют *p-ичными интервалами* (ранга k) в $\mathbb{G}$, а *смежными* — p-ичные интервалы одного ранга, чье объединение есть p-ичный интервал ранга на единицу меньше. (Интервалы Δ_{k+1}^{pm+j}, $j \in \mathbb{N}(p)$, являются смежными.)

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

Множества (1) образуют счетную базу топологии в $\mathbb{G}$. $\mathbb{G}$ является компактной абелевой группой, группу характеров которой образует *система Виленкина–Крестенсона* $\{VC_n\}_{n=0}^{\infty}$ (приведена нумерация Пэли):

$$VC_n(g) = \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i g_k n_k}{p}\right), \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k p^k, \quad n_k \in \mathbb{N}(p). \tag{2}$$

Подробнее о группе $\mathbb{G}$ и системе $\{VC_n\}$ см., напр., в [1–3].

2. Представления p-ичной группы и рядов Виленкина–Крестенсона

Здесь мы соберем в единое целое весьма разрозненные факты, касающиеся представлений группы $\mathbb{G}$, а также рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n VC_n(g), \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

См., напр., [2, § 3.1], [3], [4, Ch. 3], [5]– [9]; в части работ рассматривается лишь случай $p = 2$. К известным результатам добавлены новые.

p-ичные интервалы можно отождествить с вершинами ориентированного графа (p-ичного дерева) T_Δ на рис. 1. k-й ярус дерева составляют p-ичные интервалы Δ_k^m ранга k, упорядоченные по m естественным образом. Любое ребро графа T_Δ идет от p-ичного интервала ранга k к одному из p смежных интервалов ранга $k+1$.

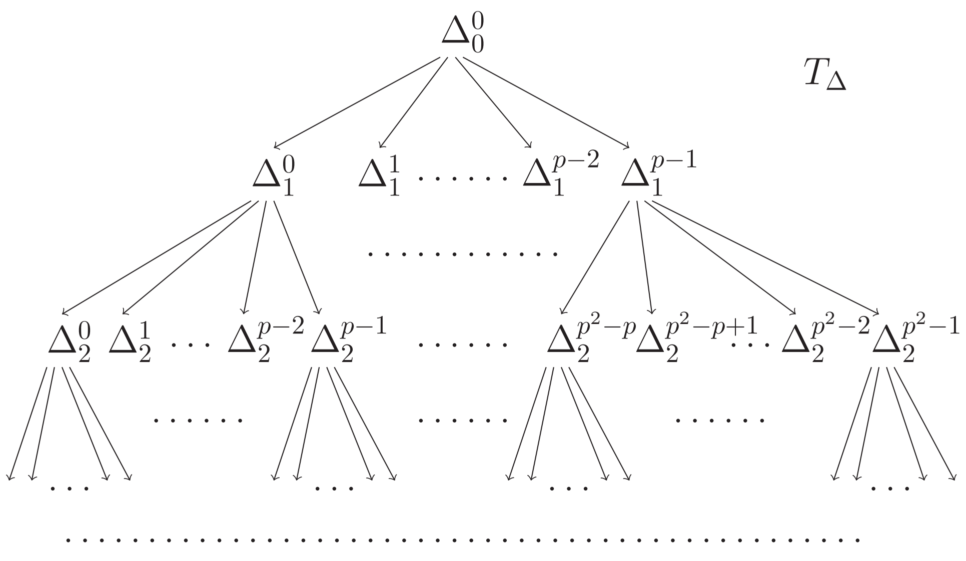

Рис. 1

Сама группа $\mathbb{G}$ отождествляется с множеством (ориентированных) путей P на графе T_Δ, начинающихся с корня Δ_0^0. Этот факт верифицируется следующей конструкцией. Для каждой вершины графа занумеруем в естественном порядке p ребер, исходящих от этой вершины, числами $0, 1, \ldots, p-1$. Тогда каждому элементу $g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}$ можно сопоставить путь P, последовательно проходящий через ребра с номерами $g_0, g_1, \ldots$. Несложно показать, что g является еще и точкой пересечения p-ичных интервалов, лежащих на пути P.

Что касается рядов (3), то каждому такому ряду можно поставить в соответствие ориентированное p-ичное дерево T_A со значениями A_k^m в вершинах, см. рис. 2. Если S_N — N-ые частичные суммы ряда (3), то $A_k^m := S_k^m$ — постоянное значение S_{p^k} на Δ_k^m.

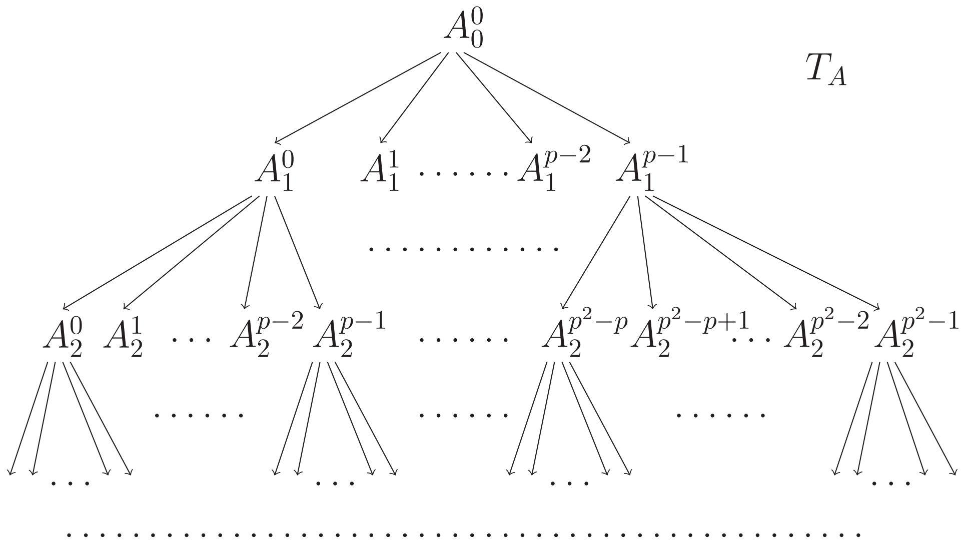

Рис. 2

Необходимым и достаточным условием такого представления является система соотношений

$$A_k^m = \frac{1}{p} \sum_{j \in \mathbb{N}(p)} A_{k+1}^{pm+j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \ldots, p^k - 1. \tag{4}$$

В несколько других настройках подобные равенства имеются в [7].

Соотношения (4) фактически означают, что последовательность S_{p^k} образует дискретный мартингал на вероятностном пространстве $\{\mathbb{G}, \mathcal{F}, \mu\}$, с фильтрацией $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Здесь $\mathcal{F}$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbb{G}$, $\mathcal{F}_k$ — σ-алгебра, порожденная p-ичными интервалами ранга k, μ — мера Хаара на $\mathbb{G}$. Напомним, что последовательность случайных величин (X_k) на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с выделенной системой σ-алгебр $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ (*фильтрацией*) образует *дискретный мартингал*, если для всех $k \in \mathbb{N}$ с.в. X_k является $\mathcal{F}_k$-измеримой, $\mathbf{E}\,|X_k| < \infty$ и $\mathbf{E}\,(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) = X_k$ (п.н.).

Еще одним представлением рядов по системе Виленкина–Крестенсона являются *квазимеры* — конечно-аддитивные функции множества, определенные на семействе p-ичных интервалов. Каждый ряд (3) порождает квазимеру τ по следующему правилу: $\tau\,(\Delta_k^m) = S_k^m/p^k$. Коэффициенты ряда (3) восстанавливаются из порождаемой им квазимеры по формуле $a_n = \int\limits_{\mathbb{G}} \overline{VC_n}\, d\tau$ при подходящем выборе понятия интеграла. Подробности — в [9, п. 2.3].

Каждую квазимеру можно рассматривать как граф T_A, удовлетворяющий соотношениям

$$A_k^m = \sum_{j \in \mathbb{N}(p)} A_{k+1}^{pm+j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \ldots, p^k - 1, \tag{5}$$

если взять $A_k^m := \tau\,(\Delta_k^m)$ для всех k и m.

В [8] квазимеры рассматривались, как линейные функционалы на пространстве $TP(\mathbb{G})$ — линейной оболочке характеристических функций p-ичных интервалов. Это дает еще одно представление рядов (3).

Теорема 1. *Следующие объекты изоморфны, как линейные пространства*:

1) *множество рядов* (3);
2) *множество графов* T_A *с соотношениями* (4);
3) *множество* p*-ичных мартингалов*;
4) *множество квазимер*;
5) *множество графов* T_A *с соотношениями* (5);
6) *множество линейных функционалов на пространстве* $TP(\mathbb{G})$.

3. U-множества для системы Виленкина–Крестенсона

Здесь мы построим новые классы U-множеств для системы $\{VC_n\}$. Напомним, что если $\{f_n\}$ — система функций, заданных на нормированном пространстве X, то множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, U*-множеством*) для системы $\{f_n\}$, если из сходимости ряда $\sum a_n f_n(x)$ к нулю на $X \setminus A$ вытекает, что все $a_n = 0$. Отметим, что семейство U-множеств обладает *свойством наследственности*: если $A \subset B$ и B есть U-множество, то A также является U-множеством.

Введем обозначения:

$$G_k := \{g = (g_0, g_1, \ldots) : \; g_k = g_{k+1} = \ldots = 0\} \subset \mathbb{G};$$

$$N_{r,k} = \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} n_j p^j + n_{k-1} p^{k-1},\ n_j,\, n_{k-1} \in \mathbb{N}(p) \right\} \subset \mathbb{N}. \tag{6}$$

Очевидно, G_k является подгруппой $\mathbb{G}$, а $N_{r,k}$ — подгруппой $\mathbb{N}$, если рассматривать p-ичные записи чисел из $\mathbb{N}$ и снабдить множество $\mathbb{N}$ операцией поразрядного сложения по модулю p.

Теорема 2. *Пусть $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим $B = \mathbb{N}(p) \setminus \{0\} = \{1, \ldots, p-1\}$,*

$$F = \{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G} \colon \quad g_{k_s - 1} \in B, \quad s \in \mathbb{N}\}. \tag{7}$$

Тогда F является U-множеством для системы $\{VC_n\}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не является верным и найдется нетривиальный ряд (3), сходящийся к нулю вне F. В силу нетривиальности ряда $\tau\left(\widehat{g} \oplus \Delta_r\right) \neq 0$ для некоторого p-ичного интервала $\widehat{g} \oplus \Delta_r$. Здесь τ — квазимера, порожденная рядом (S).

Обозначим $H_{k_s} = \mathbb{G} \setminus F_s$. Фиксируем s и пишем для краткости $k := k_s$. Рассмотрим величину

$$T_k := \tau\left(H_k \cap \left(\widehat{g} \oplus \Delta_r\right)\right) = \sum_{\Delta_k^m \subset H_k \cap (\widehat{g} \oplus \Delta_r)} \tau\left(\Delta_k^m\right).$$

С одной стороны, $\tau(\Delta_k^m) = 0$, если $\Delta_k^m \subset H_k \cap (\widehat{g} \oplus \Delta_r)$, в силу теоремы 8 из [3] и комментария к этой теореме. Поэтому $T_k = 0$ при $k \geq r$. С другой стороны, применяя технику, подобную той, что использовалась в [12], можно получить равенство

$$T_k = \frac{1}{p} \cdot \tau\left(\widehat{g} \oplus G_r\right) + \frac{1}{p^{r+1}} \cdot \sum_{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)} a_n VC_n\left(\widehat{g}\right). \tag{8}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (8). Из (6) видно, что

$$\max\{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)\} \geq p^{k-1} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Кроме того, множество $N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)$ состоит из $(p-1)\, p^r$ элементов. Примем во внимание также тождество $|VC_n| \equiv 1$ и тот факт, что сходимость ряда Виленкина–Крестенсона хотя бы в одной точке влечет соотношение $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Получим:

$$\left| \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)} a_n VC_n\left(\widehat{g}\right) \right| \leq \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)} |a_n|$$

$$\leq \frac{(p-1)p^r}{p^{r+1}} \max_{n\in N_{r,k}\setminus\mathbb{N}(p^r)} |a_n| \to 0, \quad k\to\infty.$$

Отсюда вытекает, с учетом (8), что $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = \tau\left(\widehat{g}\oplus G_r\right)/p \neq 0$. Это противоречит тому, что $T_k = 0$ при $k\geq r$, и доказывает теорему.

Множества (7) образуют, по-видимому, самый широкий известный класс замкнутых U-множеств для системы $\{VC_n\}$, включающий в себя все другие известные классы (см., напр., [8], [3], [11]), а также содержащий новые множества.

С геометрической точки зрения каждое из множеств (7) обладает определенной симметрией: оно занимает одну и ту же позицию на всех "гроздьях" смежных p-ичных интервалов (k_s-1)-го яруса дерева T_Δ, $s\in\mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел и каждого* $s\in\mathbb{N}_+$ *задано множество* $B_s \subsetneqq \mathbb{N}(p)$. *Положим*

$$F=\{g=(g_0,g_1,\ldots)\in\mathbb{G}\colon\ g_{k_s-1}\in B_s,\ s\in\mathbb{N}\}. \tag{9}$$

Тогда F *есть* U*-множество для системы* $\{VC_n\}$.

Доказательство. Так как семейство U-множеств обладает свойством наследственности, достаточно доказать теорему для случая, когда $\#F_s = p-1$ для каждого s, т.е. $F_s=\mathbb{N}(p)\setminus\{q_s\}$, $q_s\in\mathbb{N}(p)$. Если $q_s\equiv 0$, то мы находимся в условиях теоремы 2 и приходим к нужному результату.

В противном случае рассмотрим множество $(-\widetilde{g})\oplus F$, $\widetilde{g}_{k_s-1}=q_s$ для всех s и $\widetilde{g}_k=0$, если $k\neq k_s$ ни для какого s. В силу того, что F и $(-\widetilde{g})\oplus F$ одновременно либо являются, либо не являются U-множествами, ситуация сводится к случаю $q_s\equiv 0$, а затем к теореме 2. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 получается следствие, обобщающее на $p\geq 3$ результат А. А. Шнейдера из [13]. Пусть F_ζ — симметричное совершенное множество с постоянным отношением $\zeta\in(0,1/2)$. Естественным образом перенесем F_ζ с отрезка $[0,1]$ на группу $\mathbb{G}$ так, что прообразом каждого p-ичного интервала тоже будет p-ичный интервал.

Теорема 4. *Множество* $F_{1/p}$, $p\geq 3$, *является* U*-множеством для системы Виленкина–Крестенсона.*

Доказательство. Из [14, гл. 14, § 18]) вытекает, что

$$F_{1/p}=\bigcap_{s=0}^{\infty}\bigsqcup_{m=1}^{2^s-1}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{p-1}{p^j}\right)m_{s-j},\ \frac{1}{p^s}+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{p-1}{p^j}\right)m_{s-j}\right],$$

$m=\sum\limits_{j=1}^{s-1}m_j2^j$ и $\sum\limits_{j=1}^{0}:=0$. Отсюда $F_{1/p}=\{g\in\mathbb{G}\colon\ g_k=0\vee(p-1),\ k\in\mathbb{N}\}$, выбор $0\vee(p-1)$ свой для каждого s. Значит, $F_{1/p}$ представимо в виде (9), если положить $k_s \equiv s$, а $B_s \equiv \{0, p-1\}$. Применив теорему 3, завершаем доказательство теоремы 4.

На рис. 3 изображен граф T_Δ, соответствующий множеству $F_{1/p}$. Каждому $g \in F_{1/p}$ соответствует путь, начинающийся с корневого элемента и проходящий через отмеченные темным вершины.

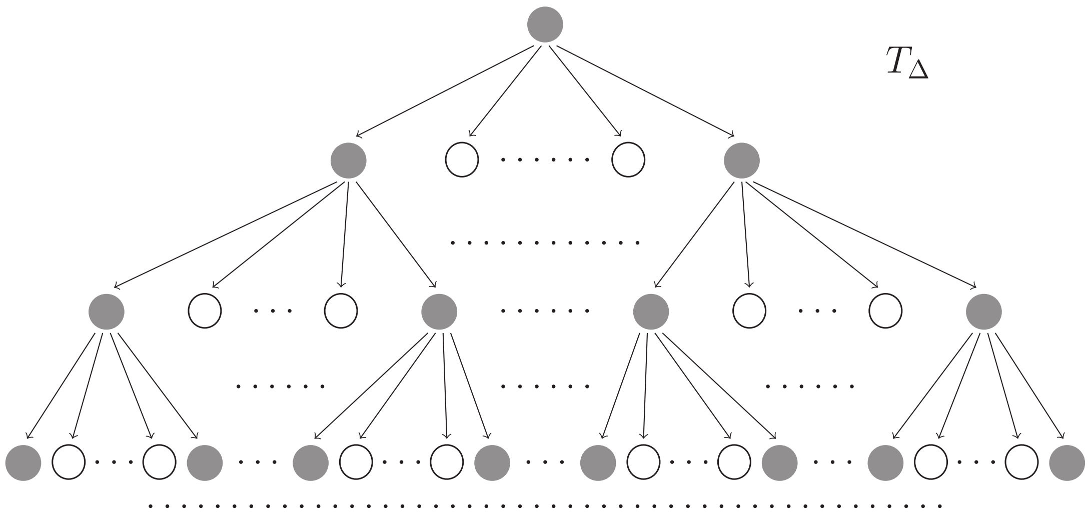

Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981. 180 с.

[2] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. М.: Наука, 1987. 344 с.

[3] *Skvortsov V.* Henstock–Kurzweil type integrals in $\mathcal{P}$-adic harmonic analysis // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 2004. T. 20,

[4] *Schipp F., Wade W. R., and Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Académiai Kiadó, 1987. 560 p.

[5] *Wade W. R., Yoneda K.* Uniqueness and quasi-measure on the group of integers of p-series field // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. T. 84,

[6] *Gundy R. F.* Martingal theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. T. 124,

[7] *Скворцов В. А.* Об одном примере двойного ряда Хаара // Матем. заметки. 1980. Т. 28,

[8] *Grubb D. J.* Sets of uniqueness in compact 0-dimensional metric groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. T. 301,

[9] *Plotnikov M.* $\mathcal{V}$-sets in the products of zero-dimensional compact abelian groups // European J. Math. 2019. T. 5,

[10] *Harris D. C.* Sets of uniqueness and closed subgroups in Vilenkin groups // Anal. Math. 1990. T. 16,

[11] *Grubb D. J.* Growth conditions for thin sets in Vilenkin groups of bounded order // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Т. 119,

[12] *Плотников М. Г.* Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда // Матем. заметки. 2014. Т. 95,

[13] *Шнейдер А. А.* О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24(66),

[14] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 937 с.