УДК 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ В УРАВНЕНИИ ПУАССОНА ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

М. Алмохамед (Москва, Россия)
mssrmtz@gmail.com

Изучается обратная задача для эллиптического уравнения Пуассона в цилиндрической области. Правая часть уравнения считается неизвестной. Доказана теорема единственности восстановления правой части при помощи специальной переопределенной системы краевых условий. Этот результат получен применением одной общей теоремы единственности для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: уравнения эллиптического типа, уравнение Пуассона, обратная задача, единственность решения.

RECONSTRUCTION OF THE INHOMOGENEOUS TERM FOR POISSON'S EQUATION WITH SPECIAL BOUNDARY CONDITIONS

M. Almohamed (Moscow, Russia)
mssrmtz@gmail.com

Inverse problem for Poisson's equation in a cylindrical domain is studied. The inhomogeneous term of the equation is unknown. A special overdetermination in a system of boundary conditions is given. The uniqueness theorem of reconstruction of the inhomogeneous term is proved. This result was obtained as applying of the general uniqueness theorem for abstract differential equations of the second order.

Keywords: elliptic partial differential equations, Poisson's equation, inverse problem, uniqueness of solution.

В цилиндрической области трехмерного пространства рассматриваем уравнение Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -g(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < z < h, \tag{1}$$

с неизвестной функцией $g(x, y)$. Здесь Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2_{(x,\,y)}$ с гладкой (или кусочно гладкой) границей $\partial\Omega$. Число $h > 0$ считаем фиксированным.

Для одновременного нахождения пары $\big\{\, u(x,\, y,\, z),\, g(x,\, y) \big\}$ возьмем набор краевых условий

$$u(x,\, y,\, z)\,|_{\partial\Omega} = \mu(x,\, y,\, z), \qquad (x, y) \in \partial\Omega, \quad 0 < z < h, \tag{2}$$

$$u(x,\, y,\, 0) = u_0(x,\, y), \qquad u_z(x,\, y,\, 0) = u_1(x,\, y), \tag{3}$$

$$u_z(x,\, y,\, h) = u_2(x,\, y). \tag{4}$$

Функции $u_0(x,\, y)$, $u_1(x,\, y)$, $u_2(x,\, y)$ заданы при $(x,\, y) \in \Omega$.

Если трактовать уравнение (1) как уравнение стационарной теплопроводности, то $u(x,\,y,\,z)$ — неизвестная температура внутри области $\Omega \times (0,\,h)$, $g(x,\,y)$ — плотность стационарных источников тепла, не зависящая от координаты z, функции $\mu(x,\,y,\,z)$ и $u_0(x,\,y)$ выражают граничные значения температуры, а функции $u_1(x,\,y)$ и $u_2(x,\,y)$ — это соответствующие температурные градиенты.

Задача (1)–(4) относится к классу *обратных задач* (см. [1, 2]). Похожие обратные задачи для эллиптических уравнений рассматривались, например, в работах [3–5]. Новым моментом является использование в (4) краевого условия второго рода, а не первого, как часто было раньше.

Основной результат состоит в следующей теореме единственности.

Теорема. *Пусть при некотором выборе функций* μ, u_0, u_1, u_2 *обратная задача* (1)–(4) *имеет два решения*

$$\bigl\{u^{(1)}(x,\,y,\,z),\,g^{(1)}(x,\,y)\bigr\},\ \ \bigl\{u^{(2)}(x,\,y,\,z),\,g^{(2)}(x,\,y)\bigr\},$$

таких, что их разность

$$u(x,\,y,\,z) \equiv u^{(1)}(x,\,y,\,z) - u^{(2)}(x,\,y,\,z),\ \ g(x,\,y) \equiv g^{(1)}(x,\,y) - g^{(2)}(x,\,y),$$

удовлетворяет условиям

$$u \in C^2(\,(\,0,h\,),\,L_2(\Omega)\,) \cap C^1(\,[\,0,h\,],\,L_2(\Omega)\,),$$

$$u(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,z) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \quad \textit{при всех} \quad z \in (0,\,h),$$

$$g \in L_2(\Omega),$$

и является решением обратной задачи для уравнения (1) *с однородным краевыми условиями* (2)–(4). *Тогда* $u^{(1)}(x,\,y,\,z) = u^{(2)}(x,\,y,\,z)$ *п. в. в цилиндре* $\Omega \times (0,h)$ *и* $g^{(1)}(x,\,y) = g^{(2)}(x,\,y)$ *п. в. в области* Ω.

Данное утверждение получается применением общего результата [6], относящегося к абстрактным дифференциальным уравнениям второго порядка. Соображения «самосопряженности» при этом не используются, что позволяет легко перенести теорему единственности в пространства типа L^p произвольным $p \in (1,\,\infty)$. Отметим, что задача (1)–(4) представляет определенный интерес для геофизики в связи с вопросом о нахождении радиоактивных источников тепла в земной коре [7].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Тихонову за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

[2] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel : Marcel Dekker, 2000. 744 p.

[3] *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.

[4] *Прилепко А. И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Новосибирск : Наука, 1992. С. 151–162.

[5] *Соловьев В. В.* Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник МГОУ. Сер. Физика – Математика. 2012. № 1. С. 27–38.

[6] *Алмохамед М.* Критерий единственности решения в одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж : Изд-во ВГУ, 2019. С. 19–20.

[7] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ; Наука, 2004. 798 с.