УДК 517.9

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ДИНИ–ЛИПШИЦА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

С. С. Платонов (Петрозаводск, Россия)

platonov@psu.karelia.ru

Пусть K — произвольное локальное поле (т. е. локально-компактное, недискретное, вполне несвязное, полное топологическое поле), функция $f(x)$ принадлежит классу Лебега $L^p(K)$, $1 < p \le 2$, и пусть $\widehat{f}(x)$ — преобразование Фурье функции f. В работе приводится решение следующей задачи: если функция f принадлежит классу Дини–Липшица $DLip(\alpha, \beta, p; K)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то для каких значений r можно гарантировать, что $\widehat{f} \in L^r(K)$? Результат работы является аналогом классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица на $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: гармонический анализ на локальных полях, функциональные пространства на локальных полях, преобразование Фурье, условия Дини–Липшица.

FOURIER TRANSFORM OF FUNCTIONS FROM DINI–LIPSCHITZ CLASSES ON LOCALLY FIELDS

S. S. Platonov (Petrozavodsk, Russia)

platonov@psu.karelia.ru

Let K be a locally field (that is a locally compact, non-discrete, totally disconnected, complete topological field). Suppose that a function $f(x)$ belongs to the the Lebesgue class $L^p(K)$, $1 < p \le 2$, and let $\widehat{f}(x)$ be the Fourier transform of f. In this paper we give an answer to the next problem: if the function f belongs to the Dini - Lipschitz class $DLip(\alpha, \beta, p; K)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, then for which values of r we can guarantee that $\widehat{f} \in L^r(K)$? The result is an analogue of one classical theorem of E. Titchmarsh about the Fourier transform of functions from the Lipschitz classes on $\mathbb{R}$.

Keywords: harmonic analysis on local fields, function spaces on local fields, Fourier transform, Dini–Lipschitz conditions.

В настоящей работе для функций на произвольном локальном поле получен аналог одной классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица на $\mathbb{R}$. Приведем точную формулировку этой теоремы.

Пусть $f(x)$ — функция из пространства $L^p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, (все рассматриваемые функции комплекснозначные), $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ — норма в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, α — произвольное число из полуинтервала $(0, 1]$. По определению функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица $Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$, если выполняется условие

$$\|f(x-t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Теорема 1 ([1, теорема 84]). *Пусть $f(x) \in Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, $0 < \alpha \le 1$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Тогда $\widehat{f}$*

принадлежит классу Лебега $L^r(\mathbb{R})$ *при*

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \leq \frac{p}{p-1}, \tag{1}$$

причем границы в неравенстве (1) *точные.*

В настоящей работе приводится аналог теоремы 1 для преобразования Фурье на произвольном локальном поле. Приведем необходимые сведения из гармонического анализа на локальных полях.

Локальным полем называется произвольное локально-компактное, недискретное, вполне несвязное, полное топологическое поле. Примерами локальных полей являются поле p-адических чисел и поле формальных рядов Лорана над произвольным конечным полем. Полное описание локальных полей см., например, в монографиях [2, 3]. Гармонический анализ на локальных полях является частным случаем более общего гармонического анализа на локально компактных абелевых группах (см. [4]), но наличие более богатых алгебраических структур на локальном поле позволяет глубже изучать различные задачи гармонического анализа и его приложений.

Пусть K — произвольное локальное поле. На K существует неархимедово абсолютное значение $x \mapsto |x| \in [0, +\infty)$, $x \in K$, удовлетворяющее условиям: 1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 2) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in K$; 3) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Подмножество $D := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ является подкольцом в K (оно называется кольцом целых чисел в K). Подмножество D является компактным открытым подмножеством в K. Пусть $B := \{x \in K : |x| < 1\}$. Подмножество B является максимальным идеалом в D и компактным открытым подмножеством в K. Фактор-кольцо K/B изоморфно конечному полю $GF(q)$, где $q = p^n$ — порядок поля, p — простое число, n — натуральное число.

Пусть dx — мера Хаара на K, удовлетворяющая условию нормировки $\mu(D) = 1$, где $\mu(A)$ — мера Хаара множества A. Обычным образом определяются банаховы пространства Лебега $L^p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L^p(K)$.

На поле K существует единственная непрерывная функция $\chi : K \mapsto \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям: 1) $|\chi(x)| = 1 \ \forall x \in K$; 2) $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) \, \forall x, y \in K$; 3) $\{x \in K : \chi(x) = 1\} = D$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ пусть $D_n = \{x \in K : |x| \leq q^{-n}$. Семейство $\{D_n, \, n \in \mathbb{Z}\}$ образует фундаментальную систему компактных окрестностей нуля в K. Отметим, что $D_0 = D$.

На любом локальном поле естественным образом определяется преобразование Фурье. Для $f \in L^1(K)$, преобразование Фурье $F : f(x) \mapsto \widehat{f}(y)$

определяется формулой

$$F(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int\limits_K f(x)\,\chi(-xy)\,dx, \qquad y \in K.$$

Для любого $p \in [1, +\infty]$ пусть $p' := \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L^p(K)$, $1 < p \leq 2$, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$ может быть определено как предел в $L^{p'}(K)$ последовательности функций

$$\widehat{f}_n(y) := \int\limits_{D_n} f(x)\,\chi(-xy)\,dx$$

при $n \to \infty$. Преобразование Фурье $F : f(x) \mapsto \widehat{f}(y)$ является линейным ограниченным оператором из банахова пространства $L^p(K)$ в банахово пространство $L^{p'}(K)$, и для любой функции $f \in L^p(K)$ справедливо неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|F(f)\|_{p'} \leq \|f\|_p,\ 1 \leq p \leq 2.$$

Для любой функции f на K и для любого $h \in K$ пусть

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Оператор τ_h называется оператором сдвига. Оператор τ_h является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L^p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Для $f \in L^p(K)$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$\omega_p(f; n) := \sup\{\|f - \tau_h f\|_p : h \in D_n\}.$$

Числовая последовательность $\{\omega_p(f; n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется модулем непрерывности функции f в пространстве $L^p(K)$.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$, β — произвольное вещественное число, $f(x)$ — комплекснозначная функция на K.

Определение. *Функция $f(x)$ принадлежит классу Дини–Липшица* $DLip(\alpha, \beta, p; K)$, если $f \in L^p(K)$ и для некоторой постоянной $c = c(f) > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_p(f; n) \leq c\, q^{-\alpha n} n^{-\beta}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

В частном случае $\beta = 0$ класс $DLip(\alpha, 0, p; K)$ называется *классом Липшица* и обозначается $Lip_{\oplus}(\alpha, p; K)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для преобразования Фурье–Уолша функций из двоичного класса Дини–Липшица.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in DLip(\alpha, \beta, p; K)$, $1 < p \le 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\widehat{f}$ *– ее преобразование Фурье на* K. *Тогда* $\widehat{f}$ *принадлежит классу Лебега* $L^r(K)$, *если* r *удовлетворяет условиям:*

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \le \frac{p}{p-1} \quad \text{при} \quad \beta \le \frac{p+\alpha p-1}{p}, \tag{2}$$

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} \le r \le \frac{p}{p-1} \quad \text{при} \quad \beta > \frac{p+\alpha p-1}{p}. \tag{3}$$

При этом границы $\frac{p}{p+\alpha p-1}$ *и* $\frac{p}{p-1}$ *в неравенствах* (2) *и* (3) *точные, т. е. область значений* r *не может быть расширена.*

В частном случае $\beta = 0$ получаем следующее следствие.

Следствие. *Если* $f(x) \in Lip(\alpha, p; K)$, $1 < p \le 2$, $\alpha > 0$, *то ее преобразование Фурье* $\widehat{f}$ *принадлежит классу Лебега* $L^r(K)$ *при*

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \le \frac{p}{p-1}, \tag{4}$$

причем границы в неравенстве (4) *точные.*

В частном случае, когда локальное поле K совпадает с полем p-адических чисел, теорема 2 доказана в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : ОГИЗ ; Гостехиздат, 1948. 418 с.

[2] *Taibelson M. H.* Fourier analysis on local fields. Prinston Univ. Press, 1975. 304 с.

[3] *Weiyi Su.* Harmonic analysis and Fractal analysis over local fields and applications. Hackensack, N J: World Scientific; Beijing : Science Press, 2018. 328 с.

[4] *Хьюитт Э. Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М. : Мир, 1978. 655 с.

[5] *Platonov S. S.* Fourier transform of Dini – Lipschitz functions on the field of p-adic numbers // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2019. Vol. 11, № 4. P. 307–318.