УДК 517.518.82

О ЯВНОЙ ЗАПИСИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова (Москва, Россия)
petrosova05@mail.ru

Обсуждается задача о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке. Выделен важный класс порождающих функций типа рационального модуля. Указан явный вид вторых производных, а также самих полиномов Бернштейна на специально отобранной последовательности возрастающих номеров. Итоговые результаты зависят, в частности, от арифметической структуры абсциссы точки излома порождающей функции. Тематика представляет интерес в связи с задачей о скорости роста коэффициентов при явной алгебраической записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, рациональный модуль, симметричный отрезок, трапеции Паскаля.

ON THE EXPLICIT ALGEBRAIC REPRESENTATION FOR BERNSTEIN POLYNOMIALS OF RATIONAL MODULE FUNCTION ON THE SYMMETRIC INTERVAL

M. A. Petrosova (Moscow, Russia)
petrosova05@mail.ru

The problem of the explicit algebraic representation for Bernstein polynomials on a symmetric interval is discussed. Special class of generating rational module functions is considered. We give explicit formulas for second derivatives, as well as for Bernstein polynomials themselves on a selected sequence of numbers. Final results depend on the arithmetic structure of the break point of generating rational module function. The subject connects with the task on the growth rate of coefficients in the explicit algebraic representation of Bernstein polynomials on a symmetric interval.

Keywords: Bernstein polynomials, rational module function, symmetric interval, Pascal trapeziums.

Для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна удобно определить формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k \, (1-x)^k \, (1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Краткий обзор по теории полиномов Бернштейна на симметричном отрезке представлен в [1].

Рассматриваем важный класс производящих функций типа рационального модуля

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [-1,1], \tag{2}$$

где $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $|p| < q$, НОД$\,(p,q) = 1$. Ставится вопрос о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна для функции (2).

Известно (см. [2]), что в последовательности полиномов Бернштейна для кусочно линейных порождающих функций возможны совпадающие пары, образующие бесконечную цепочку регулярных склеиваний. Применительно к функции (2) получаем

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

если оба числа p, q являются нечетными, или же

$$B_{2qm+1}(f,x) = B_{2qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

если хотя бы одно из чисел p, q четное.

Используя общие формулы для производных полиномов Бернштейна на симметричном отрезке (см. [3]), находим явные выражения вторых производных от полиномов из соответствующих цепочек (3) или (4).

Теорема 1. *Пусть $B_n(f,x)$ — полиномы Бернштейна* (1) *для функции* (2). *Если оба числа p, q в формуле* (2) *являются нечетными, то*

$$B''_{qm}(f,x) = (q^2-p^2)m \cdot 2^{-qm} C_{qm}^{sm} (1-x)^{sm-1} (1+x)^{tm-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

со значениями $s=(q-p)/2$, $t=(q+p)/2$. Если же хотя бы одно из чисел p, q в формуле (2) *четное, то*

$$B''_{2qm}(f,x) = 2(q^2-p^2)m \cdot 2^{-2qm} C_{2qm}^{sm} (1-x)^{sm-1} (1+x)^{tm-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

со значениями $s=q-p$, $t=q+p$.

Для раскрытия скобок в выражениях (5) и (6) применим так называемую *формулу бибинома*

$$(1-x)^j (1+x)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} D_{n,j}^k x^k, \qquad j,\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad n \geqslant j, \tag{7}$$

с коэффициентами $D_{n,j}^k$, образующими специальные *трапеции Паскаля* (см. [4]). Раскрывая этим способом скобки в (5) и (6), и проводя двукратное интегрирование, получаем явную алгебраическую запись полиномов Бернштейна по степеням переменной x на цепочках склеиваний (3) и (4).

Ввиду определенной громоздкости общих формул рассмотрим частный пример функции $f(x) = |3x-2|$. Пара $p=2$, $q=3$ содержит четное число. Поэтому реализуются возможности (4) и (6). Расчет по формуле (6) со значениями $s=1$, $t=5$ дает представление

$$B''_{6m}(f,x) = 10m \cdot 2^{-6m} C_{6m}^{m} (1-x)^{m-1} (1+x)^{5m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Формула бибинома (7) принимает здесь вид

$$(1-x)^{m-1}\,(1+x)^{5m-1} = \sum_{k=0}^{6m-2} D^k_{6m-2,\,m-1}\,x^k, \quad m\in\mathbb{N}. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в представление (8) и проводя двукратное интегрирование, имеем окончательный результат

$$B_{6m}(f,x) = \alpha_m + \beta_m\,x + 10m\cdot 2^{-6m} C^m_{6m} \sum_{k=0}^{6m-2} D^k_{6m-2,m-1}\,\frac{x^{k+2}}{(k+1)\,(k+2)}$$

при $m\in\mathbb{N}$. Числа $D^k_{6m-2,m-1}$ вычисляются по таблицам из работы [4]. Для коэффициентов α_m и β_m компактные выражения пока не найдены. Нетрудно заметить, впрочем, что $2<\alpha_m<3$ и $-3<\beta_m<0$ при всех значениях $m\in\mathbb{N}$. Эти оценки связаны с геометрической структурой функции $f(x)=|3x-2|$.

Аналогично проводятся расчеты во всех остальных примерах вида (2) на соответствующих цепочках (3) или (4). Отметим, что для полиномов Бернштейна, не попадающих в цепочки склеиваний, формулы вторых производных становятся сложнее, чем (5) или (6). Там возникают дополнительные слагаемые, и решение задачи сильно затрудняется.

Исследуемое направление представляет интерес в связи с нетривиальным вопросом о скорости роста коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи на симметричном отрезке (см. [5], [6]).

Выражаю благодарность И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Петросова М. А.* Краткий обзор по теории полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 230–235.

[2] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300.

[3] *Петросова М. А.* О некоторых соотношениях, связанных с полиномами Бернштейна для рационального модуля на симметричном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2018. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. С. 153–157.

[4] *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавказ. матем. журн. 2019. Т. 21, вып. 3. С. 68–91.

[5] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XIX Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию физ.-матем. факультета СмолГУ. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 336–347.

[6] *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О росте коэффициентов в полиномах Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, вып. 3. С. 89–107.