УДК 517.9

КОМПАКТНЫЙ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ И МЕТРИКА ХАУСДОРФА

И. В. Орлов, И. В. Баран (Симферополь, Россия)
igor_v_orlov@mail.ru, matemain@mail.ru

Рассмотрена связь субдифференциального исчисления с топологией конуса выпуклых компактов и конуса сублинейных компактнозначных операторов, а также связь с частичными пределами разностных отношений в случае симметрических субдифференциалов.

Ключевые слова: компактный субдифференциал, симметрический субдифференциал, метрика Хаусдорфа, субнорма.

COMPACT SUBDIFFERENTIAL AND HAUSDORFF METRIC

I. V. Orlov, I. V. Baran (Simferopol, Russia)
igor_v_orlov@mail.ru, matemain@mail.ru

The connection between the subdifferential calculus and the topology of the cone of convex compact sets and the cone of sublinear compact-valued operators, as well as the connection with the partial limits of difference relations in the case of symmetric subdifferentials is considered.

Keywords: compact subdifferential, symmetric subdifferential, Hausdorff metric, subnorm.

Введение

Мы исходим из понимания сильного субдифференциала как ограниченного сублинейного многозначного оператора с компактными выпуклыми значениями. Это определяет тесную связь построенного исчисления с подходящей топологией конуса выпуклых компактов и конуса сублинейных компактнозначных операторов. Нашей целью является описание такой связи. Отметим основные моменты.

1. Классическая топология Помпейю–Хаусдорфа в конусе выпуклых компактов может рассматриваться как неинвариантная сублинейная топология, порождаемая супремум–нормой.

2. Для суб–операторов в банаховых пространствах ограниченность и непрерывность равносильны. Однако в случае конусов ограниченность суб–оператора связана с более слабым понятием субнепрерывности.

3. В случае пространств Фреше описано равносильное определение субдифференциала, без прямого применения метрики Хаусдорфа, как выпуклого замыкания множества производных чисел Дини.

1. Классический анализ Фреше

Прежде чем переходить к субдифференциалам, напомним базовые понятия анализа Фреше в банаховых пространствах:

1. Основные объекты анализа Фреше связаны с линейностью: линейное пространство (нормированное, обычно полное (банахово)); линейная топология (топология, согласованная с линейными операциями); линейные операторы (обычно ограниченные по норме).

2. Основные определения: X, Y – банаховы пространства, $f : X \supset U(x) \to Y;\ h \in X$. Дифференциал по направлению:

$$\partial f(x,h) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \tag{1}$$

Сильный дифференциал: $\partial f(x) \in L(X;Y)$, сходимость в (1) равномерна по $\|h\| \leq 1$.

Переход к негладкому анализу требует существенного изменения всех базовых понятий: переход к выпуклым конусам; переход к позитивно линейной неинвариантной топологии; переход к сублинейным компактнозначным операторам.

2. Выпуклые конусы

Классические конусы — ВК, содержащиеся в некотором линейном пространстве (ЛП). *Вложимые (канцеллятивные) конусы* — ВК, допускающие изоморфное вложение в ЛП. *Абстрактные (неканцеллятивные) конусы* — не допускают изоморфного вложения ни в какое линейное пространство. Важным классом конусов являются конусы подмножеств ЛП.

Отметим, что в конусах обычно применяется специальная метрика — метрика Помпейю–Хаусдорфа.

3. Метрика Помпейю–Хаусдорфа

Далее Y — банахово пространство, Y_K — конус непустых выпуклых компактов из Y. Введем метрику Хаусдорфа в Y_K следующим образом

$$B_1, B_2 \in Y_K : \quad h(B_1, B_2) = \max\left(h^1(B_1, B_2),\ h^2(B_1, B_2)\right),$$

$$h^1(B_1, B_2) = \sup_{y_2 \in B_2} d(y_2, B_1);\ h^2(B_1, B_2) = \sup_{y_1 \in B_1} d(y_1, B_2).$$

Отметим важное отличие топологий: топология ЛП всегда инвариантна относительно переноса, однако топология ВК — полугрупповая.

Метрика Хаусдорфа в нуле однородна, поэтому мы свяжем с ней удобное понятие *субнормы*:

$$\|C\| = \sup_{y\in C} \|y\| = h(C, \{0\}).$$

Метрику Хаусдорфа можно рассматривать и в более обширном конусе Y_B, где Y — метрическое пространство. Напомним понятие субпредела (см. [3] – [5]).

Определение 1. Пусть T – метрическое пространство, Y – банахово пространство, $\varphi : T \supset U(t_0) \to Y$ локально ограничено. Положим:

$$\operatorname*{sublim}_{t\to t_0}\varphi(t) := \lim_{\delta\to 0}(\overline{co}\varphi(\dot{U}_\delta(t_0)) = C_0 \quad \text{(в } (Y_B, h)); \quad \text{если } C_0 \in Y_K.$$

Здесь $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества; $\lim\limits_{\delta\to 0}$ — предел в метрике Хаусдорфа в Y_B, однако при дополнительном условии компактности предельного множества: $C_0 \in Y_K$. Особенно просто субпредел выражается для функционалов.

Пример 1. Пусть $\varphi : T \to \mathbb{R}$, тогда $\operatorname*{sublim}\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = \left[\varliminf\limits_{t\to t_0}\varphi(t);\ \varlimsup\limits_{t\to t_0}\varphi(t)\right]$ (если пределы конечны).

4. Метрика Хаусдорфа и суб-операторы

Сублинейные многозначные операторы с компактными выпуклыми значениями в качестве субдифференциалов впервые были введены в работе А. Д. Иоффе [1]. Приведем основное определение, распространив его на выпуклые конусы.

Определение 2. Пусть X, Y – субнормированные конусы, $A : X \to Y_K$ – сублинейный оператор. В конусе суб–операторов можно ввести *субнорму*:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|.$$

$L_{sub}(X; Y_K)$ — конус ограниченных сублинейных операторов $A : X \to Y_K$.

Распространим теперь понятие метрики Хаусдорфа на конус суб–операторов.

$$h(A_1, A_2) = \sup_{\|x\|\le 1} h(A_1x, A_2x); \ \|A\| = h(A, 0).$$

Отметим, что введенная выше субнорма суб–оператора порождается данной версией метрики Хаусдорфа, аналогично субнорме выпуклого компакта. Теорема о полноте конуса суб–операторов также вполне аналогична классической теореме о полноте конуса L_K (см. [4]).

Для классических линейных операторов ограниченность по норме и непрерывность равносильны. Однако для суб–операторов из ограниченности по субнорме следует лишь непрерывность в нуле. Для глобального описания мы используем понятие «внешней полунепрерывности», или «субнепрерывности»:

$$(A \in C_{sub}(x_0)) \Leftrightarrow [(x \to x_0) \Rightarrow (h^1(Ax, Ax_0) \to 0)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; (x \in U_\delta(x_0)) \Rightarrow (Ax \subset V_\varepsilon(Ax_0))] \, .$$

Теорема 1. *Пусть X, Y – банаховы конусы, $A : X \to Y_K$ – суб-оператор. Следующие условия равносильны: $\|A\| < \infty$; A непрерывен в нуле; A равномерно субнепрерывен на X.*

Теорема 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y_K$ – суб-оператор. Тогда следующие условия равносильны: A равномерно субнепрерывен в X; A равномерно непрерывен в X.*

Приведем пример субнепрерывного, но разрывного оператора.

Пример 2. Пусть $(X, \ \|\cdot\|_0)$ — произвольное банахово пространство, $\mathrm{dim} X = \infty$:

$$(X, \ \|\cdot\|_0) \overset{\sim}{\hookrightarrow} \ (X, \ \|\cdot\|_1),$$

$$Ax = [0; 1] \cdot \|x\|_1, \quad A : \ X \to \mathbb{R}_K.$$

5. Компактные субдифференциалы

Напомним, что понятие субдифференциала от выпуклого функционала возникло в работах Рокафеллара и Моро [2]. Позднее возникло эффективное обобщение — субдифференциал Кларка. Отметим здесь известную работу А. Д. Иоффе [1].

В работах [4], [5] мы развивая идею Иоффе, ввели компактный субдифференциал как субаддитивный и однородный компактнозначный оператор, что создало базу для построения субдифференциального исчисления как первого, так и высших порядков.

Приведем необходимую формулировку в случае первого порядка.

Определение 3. Компактный субдифференциал (по направлению; сильный) $(f : X \supset U(x) \to \ Y, \ h \in \ X)$:

$$\partial_{sub} f(x, h) = \underset{t \to +0}{\mathrm{sublim}} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \quad (\rightrightarrows \text{ по } \|h\| \leq 1).$$

Переход в конусы:

$$\partial_{sub} f(x, h) = \underset{t \to +0}{\mathrm{sublim}} \; \overline{co}\{y \in Y | f(x + th) = f(x) + t \cdot y\} \quad (\rightrightarrows \text{ по } \|h\| < 1).$$

Прямое вычисление компактного субдифференциала представляет непростую задачу. Рассмотрим подход, сводящий задачу к вычислению обычных производных чисел Дини.

1. Производные числа Дини по направлению:

$$\partial_{part} f(x,h) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x + t_k \cdot h) - f(x)}{t_k} \ (t_k \to +0).$$

2. Основная формула: (распространяется на пространства Фреше)

$$\partial_{sub} f(x,h) = \overline{co}\{\partial_{part} f(x,h)\}.$$

3. Случай функционалов ($f : X \to \mathbb{R}$):

$$\partial_{sub} f(x,h) = [\underline{\partial f}(x,h);\ \overline{\partial f}(x,h)].$$

Последние результаты, в применении к интегранту вариационного функционала, позволяют получить и оценку первого субдифференциала (первой субвариации) основного вариационного функционала.

Пусть $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$. Тогда

$$\partial_{sub}\Phi(y,h) \subset \left[\int_a^b (\underline{\frac{\partial f}{\partial y}} h + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'}} h')dx;\ \int_a^b (\overline{\frac{\partial f}{\partial y}} h + \overline{\frac{\partial f}{\partial y'}} h')dx\right].$$

Пример 3. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^1).$$

Тогда

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(f(x,y,y')\neq 0)} sign(f(x,y,y')) \cdot (\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h')dx +$$

$$+[-1;1] \cdot \int\limits_{(f(x,y,y')=0)} (\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h')dx.$$

6. Субдифференциалы второго и высших порядков (индуктивный подход)

Классическое определение дифференциалов Фреше второго и высших порядков основано на канонической изометрии пространства линейных операторов и пространства билинейных операторов. Это позволяет рассматривать дифференциалы высших порядков как полилинейные операторы.

Следуя этому образцу, мы устанавливаем каноническую изометрию конуса сублинейных операторов и конуса бисублинейных операторов.

Определение 4. Пусть $B_{sub}(X_1, X_2; Y_K)$ – конус бисублинейных ограниченных операторов; тогда

$$L_{sub}(X_1; L_{sub}(X_2; Y_K)_K) \cong B_{sub}(X_1, X_2; Y_K).$$

Определение 5. Пусть $f : X \supset U(x) \to Y$ сильно субдифференцируем в $U(x)$. Рассмотрим

$$\partial_{sub} f : X \supset U(x) \to L_{sub}(X; Y_K)$$

и положим:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h, k) := (\partial_{sub}(\partial_{sub} f)(x)h)k.$$

Случай функционалов особенно важен для применений к эстремальным задачам.

Пример 4. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h)^2 \subset H_{sub} \cdot (h)^2,$$

где

$$H_{sub} = \left(\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x);\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x) \right] \right)_{i,j=1}^{n} \quad \text{– «субматрица Гессе».}$$

7. Обобщение метрики Хаусдорфа-Помпейю: H-равномерность

Здесь мы хотим обобщить идею метрики Хаусдорфа, переходя от классического случая выпуклых компактов в банаховом пространстве к более общему случаю выпуклых компактов в выпуклом конусе, снабженном некоторой равномерной топологией.

Определение 6. Пусть X – выпуклый конус с равномерной сублинейной топологией, порожденной базой окружений диагонали $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, X_K – конус выпуклых компактов в X. Определим в X_K базу равномерности Хаусдорфа через окружения ΔX_K:

$$V_i = \{(C_1, C_2) |\ C_1 \subset U_i(C_2);\ C_2 \subset U_i(C_1)\}_{i \in I}.$$

Пример 5. Пусть X – банахово пространство, $\sigma(X)$ — слабая топология в X, X_K — конус слабо компактных выпуклых подмножеств в X. Тогда предбаза H–равномерности в X_K^σ:

$$V_{f,\varepsilon} = \{(C_1, C_2)|\ h(f(C_1), f(C_2)) < \varepsilon\}\ (f \in X^*,\ \varepsilon > 0).$$

Покажем теперь, что в случае слабой топологии компактный субдифференциал уже не вычисляется, вообще говоря, через выпуклое замыкание множества производных числе Дини:

$$\partial^\sigma_{sub} f(x,h) \neq \overline{co}\{\partial^\sigma_{part} f(x,h)\}.$$

1. Построение: $X = \mathbb{R}$, $\quad Y$ — несепарабельное гильбертово пространство, порожденное

$$\varphi_x(t) = e^{ixt}\ (0 \le t \le 2\pi),\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = x \cdot \varphi_x(\cdot);\ f : \mathbb{R} \to Y.$$

2. Вычисление $\partial_{sub} f(0) \quad (\forall \delta > 0)$:

$$\overline{co}\left\{\frac{f(x) - f(0)}{x} | 0 < |x| < \delta\right\} = \overline{co}\{\varphi_x(\cdot)\big|\ |x| < \delta\} = B_\delta \subset B_1(0) \subset Y.$$

Отсюда

$$\forall \lambda \in Y^* \exists \operatorname*{sublim}_{\delta \to 0} \lambda[B_\delta] \Rightarrow \exists \partial^\sigma_{sub} f(0).$$

В заключение отметим простую связь между слабой формой условия Липшица и слабой субдифференцируемостью по направлениям.

Теорема 3. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $f : X \supset U(x) \to Y$. Если $f \in Lip^\sigma(x)$, то f слабо субдифференцируемо в точке x по любому направлению. В частности, если $f : \mathbb{R} \to Y$ и $f \in Lip^\sigma(x)$, то f слабо субдифференцируемо в точке x.*

8. Обобщение: симметрические компактные субдифференциалы

Недавно в нашей работе [3] были введены понятия симметрических компактных субдифференциалов произвольного порядка. Приведем определение в случае первого порядка (по направлению, сильный):

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) = \operatorname*{sublim}_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \quad (\text{sublim} \rightrightarrows \text{ по } \|h\| \le 1).$$

В случае пространств Фреше на симметрические субдифференциалы обобщается результат о связи с частичными пределами разностных отношений:

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) = \overline{co}\left\{\partial^{[\prime]}_{part} f(x,h) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x+t_k h) - f(x-t_k h)}{2t_k}\right\}.$$

Однако нетрудно показать, что в случае слабой топологии возможно нарушение этой связи:

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) \neq \overline{co}\{\partial^{[\prime]}_{part} f(x,h)\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ioffe A. D.* Nonsmooth Analysis: Differential Calculus of Noundifferential Mappings. Trans // AMS, 1981. Vol. 266 (1). P. 1–56.

[2] *Rockafellar R. T., Wets R. J. B.* Variational Analysis. Berlin : Springer, 1997. 736 p.

[3] *Орлов И. В., Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант // Соврем. мат. Фундам. направл. 2015. Т. 57, С. 108–161.

[4] *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 53, С. 64–132.

[5] *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации. Симферополь : ДИАЙПИ, 2016. 320 с.