УДК 517.98

СХОДИМОСТЬ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ $\widehat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ В СЛУЧАЕ ЦЕЛЫХ α И β

А. А. Нурмагомедов (Махачкала, Россия)
alimn@mail.ru

В данной работе для непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$ построены дискретные суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ по системе многочленов $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, являющихся дискретными аналогами классических многочленов Якоби. Исследуются аппроксимативные свойства построенных частных сумм $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ порядка $n \le N-1$. В частности, получена оценка отклонения частной суммы $S_{n,N}(f,x)$ от $f(x)$, которая зависит от n и положения точки $x \in [-1,1]$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, дискретные суммы Фурье, функция Лебега.

CONVERGENCE OF FOURIER SUMS BY POLYNOMIALS $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, ORTHOGONAL ON NON-UNIFORMS GRIDS IN THE CASE INTEGERS α and β

A. A. Nurmagomedov (Makhachkala, Russia)
alimn@mail.ru

For continuous function $f(x)$ on the segment $[-1,1]$ is constructed discrete sums by Fourier $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ on system polynomials $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ representing descrete analogs of classical Jacobi polynomials. Approximation properties of the constructing partial sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ order $n \le N-1$ are investigated. In particular, is obtained the estimation deflection partial sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ from $f(x)$ with is depended from n and position of a point x on the $[-1,1]$.

Keywords: polynomial, orthogonal system, set, discrete Fourier sums, Lebesgue function.

Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $\Omega = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — сетка, состоящая из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1] : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N = \{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где $x_j = \frac{t_j+t_{j+1}}{2}$, $j = 0,1,...,N-1$.

Через $\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x) = \hat{p}_{k}^{\alpha,\beta}(x;\Omega)$ $(k = 0,1,\ldots,N-1)$ обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в следующем смысле $(0 \le n,m \le N-1)$:

$$(\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}, \hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}) = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm},$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, j = 0,1,\ldots,N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max_{0\le j\le N-1}\Delta t_j$, $æ_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В.А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$, $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортонормированный многочлен Якоби, $C[-1,\,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(x)$ с нормой $\| f \| = \| f \|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1} \mid f(x) \mid$, $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени n, $E_n(f) = \min_{l_n\in\mathcal{P}_n} \| f - l_n \|_{C[-1,1]}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n.

Через $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ обозначим частную сумму n–ого порядка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, т.е.

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta}\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x),$$

где

$$\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta f(x_j)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j.$$

Как известно, задача об оценке отклонения частной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ ряда Фурье функции $f \in C[-1,1]$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $x \in [-1,\,1]$ и $n, N \to \infty$ посредством неравенства Лебега:

$$\mid f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) \mid \le (1 + L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x))E_n(f)$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right| \Delta t_j,$$

где

$$K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j) = \sum_{k=0}^{n}\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j).$$

В работе [1] нами исследованы асимптотические свойства многочлена $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $n, N \to \infty$. А основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C[-1,1], b > 0, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{1/4}$, α, β — *целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}, n = O(\delta_N^{-1/(\lambda+3)})$. *Тогда справедлива оценка* $(-1 \le x \le 1):$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \le c(\alpha,\beta,a,b)\left\{\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right\}.$$

Касаясь вопроса о точности полученнной нами оценки для функции $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, то следует сказать, что указанная оценка точна по порядку.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C[-1,1], b > 0, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{1/4}$, α, β — *целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}, n = O(\delta_N^{-1/(\lambda+3)})$. *Тогда равномерно относительно* $-1 \le x \le 1$ *справедлива оценка*

$$\left|f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\right| \le$$

$$\le c(\alpha,\beta,a,b)E_n(f)\left\{\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 10–19.

[2] *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.

[3] *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 359 с.

[4] *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Приближение функций суммами Фурье–Якоби // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 1. С. 9–10.

[5] *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функция Лебега сумм Фурье–Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. 1968. Т. 1. С. 11–13.

[6] *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 9, № 6. С. 1263–1283.

[7] *Бадков В. М.* Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск, 1987. С. 31–45.

[8] *Шарапудинов И. И.* О сходимости метода наименьших квадратов // Матем. заметки, 1993. Т. 53, № 3. С. 131–143.

[9] *Gronwall T.* Uber die Laplacische Reihe // Math. Ann. 1913. Vol. 74. P. 213–270.

[10] *Rau H.* Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen nach Jacobischen // Polynomen. Journ. fur Math. 1929. Vol. 161. P. 237–254.

[11] *Нурмагомедов А. А.* Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках // Изв.Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3 (2). С. 29–42.

[12] *Nurmagomedov A. A.* Convergence of Fourier sums in polynomials orthogonal on arbitrary grids // Russ. Math. (Iz. VUZ), 2012. Vol. 56, № 7. P. 52–54.

[13] *Nurmagomedov A. A., Rasulov N. K.* Two-sided estimates of Fourier sums Lebesgue functions with respect to polynomials orthogonal on nonuniform grids // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2018. Vol. 51, № 3. P. 249–259.

[14] *Коркмасов Ф. М.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Якоби // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 334–355.

[15] *Нурмагомедов А. А., Нурмагомедов И. А.* О сходимости дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, АН респ. Татарстан, 2019. Т. 57. С. 254–257.