УДК 517.9

МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРОВ СИНТЕЗА РАВНОМЕРНОГО ЖЕСТКОГО ФРЕЙМА С ПОЛНЫМ СПАРКОМ В $\mathbb{R}^d$

С. Я. Новиков[1], Д. А. Рогач (Самара, Россия)
mostvil53@gmail.ru, ida@ssau.ru

Матрица оператора синтеза для равномерного жёсткого фрейма в явном виде построена А. И. Мальцевым в 1947 году. Случайная матрица для оператора синтеза фрейма с полным спарком представлена Б. С. Кашиным в 1977 году.

В данной работе рассмотрены детерминированные способы построения равномерных жёстких фреймов с полным спарком.

Ключевые слова: фрейм, ортопроектор, фрейм Парсеваля, равномерный фрейм.

MATRICES OF SYNTHESIS OPERATORS FOR AN EQUAL NORM TIGHT FULL SPARK FRAME IN $\mathbb{R}^d$

S. Ya. Novikov[1], D. A. Rogach (Samara, Russia)
mostvil53@gmail.ru, ida@ssau.ru

The matrix of the synthesis operator for an equal norm tight frame was explicitly constructed by A. I. Maltsev in 1947. Random matrix for the synthesis operator of the full spark frame was presented by B. S. Kashin in 1977.

Deterministic construction methods for matrices of the synthesis operators for the full spark equal norm tight frames are considered here.

Keywords: frame, orthoprojector, Parseval frame, equal norm frame.

Определение 1. *Система векторов* $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ *называется фреймом пространства* $\mathbb{R}^d$*, если существуют константы* $0 < A \leq B < \infty$ *такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^d$

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

В конечномерном пространстве понятие фрейма эквивалентно полноте системы, то есть $span\{\phi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^d$.

Определение 2. *Фрейм называется*

а) жестким, если $A = B$*;*

б) фреймом Парсеваля, если $A = B = 1$*;*

в) равномерным, если существует $\alpha > 0$ *такое, что* $\|\phi_n\| = \alpha$*,* $n = 1, ..., N$.

Понятие фрейма и терминология, связанная с ним, стала активно использоваться сравнительно недавно. Некоторые классические результаты получили новое звучание.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00138).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project № 17-01-00138).

Теорема 1. [1] *Система* $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ *является фреймом Парсеваля для* $\mathbb{R}^d$ *тогда и только тогда, когда существует* N*-мерное евклидово пространство* $\mathbb{H}^N$ *и ортонормированный базис* $\{b_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{H}^N$ *такие, что* $\mathbb{R}^d$ *является подпространством* $\mathbb{H}^N$ *и* $\phi_n = P_{\mathbb{R}^d} b_n$ *для всех* n*, где* $P_{\mathbb{R}^d}$*-ортопроектор из* $\mathbb{H}^N$ *на* $\mathbb{R}^d$*.*

Теорема 1 была обобщена на фреймы общего вида в [2].

Конструкция фреймов Парсеваля в теореме 1 является универсальной, однако имеет недостаток, состоящий в том, что получающиеся из нее фреймы Парсеваля не являются равномерными. Поэтому возникает вопрос о существовании равномерного фрейма Парсеваля с произвольным количеством элементов $N \geq d$.

Оказалось, что положительный ответ на этот вопрос получил А.И. Мальцев в [3]. На языке фреймов результат Мальцева звучит так: в пространстве $\mathbb{R}^d$ для $\forall N \geq d$ существует равномерный фрейм Парсеваля $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$.

Важной для приложений характеристикой оказался так называемый спарк.

Спарком системы векторов называется минимальное количество линейно зависимых векторов. Если это количество на единицу превосходит размерность пространства, то говорят о системе с полным спарком. Таким образом, если $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ имеет полный спарк, то любая подсистема Φ из d векторов линейно независима.

Б.С. Кашин в [4] доказал существование случайной прямоугольной матрицы, столбцы которой образуют систему с полным спарком в $\mathbb{R}^d$. Количество таких столбцов может быть произвольным больше или равным d.

Несмотря на то, что упомянутые выше результаты давно стали классическими, явных примеров равномерных жестких фреймов с полным спарком очень мало.

В [5] дана общая схема построения таких систем с помощью ортогональных полиномов, но примеров реализации этой схемы пока нет. В качестве примера покажем матрицу оператора синтеза (её столбцы состоят из координат векторов фрейма) равномерного жесткого фрейма в $\mathbb{R}^2$ с полным спарком из шести элементов.

Фактически главным и пока достаточно хорошо изученным источником равномерных жестких фреймов с полным спарком в $\mathbb{R}^d$ остается матрица дискретного преобразования Фурье. Элементы этой матрицы - комплексные числа, однако правильный выбор столбцов и строк матрицы и простые арифметические операции с ними приводят к матрицам синтеза фреймов с заданными свойствами. Равномерные жесткие фреймы для произвольных пар чисел (d, N) были построены на основе уточнений и исправлений работ предшественников в работах М.А. Лихобабенко [6]. Исследование построенных в этой работе фреймов на полноту спарка не проводилось, но непосредственное вычисление определителей квадратных матриц операторов синтеза в пространствах малых размерностей показывает, что эти матрицы имеют полные спарки. В качестве примера приводим матрицы равномерных жестких фреймов с полным спарком для пар $(2,6)$ и $(2,7)$.

Пример 1. *Построим фрейм Φ_1 для $d=2$, $N=6$.*

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} cos0 & cos\frac{\pi}{6} & cos\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{2} & cos\frac{2\pi}{3} & cos\frac{5\pi}{6} \\ sin0 & sin\frac{\pi}{6} & sin\frac{\pi}{3} & sin\frac{\pi}{2} & sin\frac{2\pi}{3} & sin\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. *Равномерный жесткий фрейм Φ_2 для $d=2$, $N=7$.*

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & cos\frac{6\pi}{7} & cos\frac{12\pi}{7} & cos\frac{18\pi}{7} & cos\frac{24\pi}{7} & cos\frac{30\pi}{7} & cos\frac{36\pi}{7} \\ 0 & sin\frac{6\pi}{7} & sin\frac{12\pi}{7} & sin\frac{18\pi}{7} & sin\frac{24\pi}{7} & sin\frac{30\pi}{7} & sin\frac{36\pi}{7} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0,90... & 0,62... & -0,22... & -0,22... & 0,62... & -0,90... \\ 0 & 0,43... & -0,78... & 0,97.... & -0,97... & 0,78... & -0,43... \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Наймарк М. А.* Спектральные функции симметрического оператора // Известия АН СССР. Сер. матем., 1940. Т. 4, № 3. С. 277–318.

[2] *Кашин Б. С., Куликова Т. Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.

[3] *Мальцев А. И.* Замечания к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов» // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 6. С. 567–568

[4] *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.

[5] *Puschel M., Kovacevic J.* Real, tight frames with maximal robustness to erasures // IEEE, 2005. Data Compression Conference. P. 63–72.

[6] *Новиков С. Я., Лихобабенко М. А.* Фреймы конечномерных пространств [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов. Самара : Самар. ун-т, 2013. on-line. ISBN = 978-5-86465-576-4 (12.09.2019)