УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА В УЗЛАХ, БЛИЗКИХ К УЗЛАМ ЯКОБИ

В. В. Новиков (Саратов, Россия)
vvnovikov@yandex.ru

Приведена схема доказательства существования матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкой к матрице узлов Якоби, со следующим свойством. Пусть заданы непрерывная на $[-1, 1]$ функция f и числа $-1 < a < b < 1$. Тогда f можно исправить (с сохранением непрерывности) на множестве как угодно малой меры так, что интерполяционный процесс Лагранжа исправленной функции с узлами $\mathfrak{M}_\gamma$ будет сходится к ней равномерно на $[a, b]$.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, ортогональные многочлены Якоби, исправление функций.

ADJUSTMENT OF FUNCTIONS AND LAGRANGE INTERPOLATION BASED ON THE NODES CLOSE TO THE JACOBI NODES

V. V. Novikov (Saratov, Russia)
vvnovikov@yandex.ru

We give a proof sketch for an existence of interpolatory matrix $\mathfrak{M}_\gamma$ arbitrarily close to the Jacobi matrix, with the following property. Let a continuous on $[-1, 1]$ function f and numbers $-1 < a < b < 1$ be given. Then f can be adjusted in a set of arbitrarily small measure so that the Lagrange interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g in $[a, b]$.

Keywords: Lagrange interpolation, Jacobi orthogonal polynomials, adjustment of functions.

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, и $\{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)}\}_{i=1}^n$ — нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции f, заданной на $[-1, 1]$, обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-ой строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)} : \ i = i = \overline{1, n};\ n \in \mathbb{N}\}$. Если $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел и матрица $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\}_{i,n=1}^\infty$ такова, что $|x_{k,n}^{(\alpha,\beta)} - y_{k,n}| < \gamma_n$; $i = \overline{1, n}$; $n \in \mathbb{N}$, то условимся писать $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть числа a, b, и $\varepsilon > 0$ таковы, что

$$-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}: \ -1 =: y_{n+1,n} < y_{n,n} < y_{n-1,n} < \ldots < y_{1,n} < y_{0,n} := 1,\ n = 1, 2, \ldots,$$

— произвольная матрица узлов интерполирования на $[-1, 1]$ и $f \in C[-1; 1]$. Положим $\Delta_{i,n} = (y_{i+1,n}, y_{i,n})$, $|\Delta_{i,n}| = y_{i,n} - y_{i+1,n}$, $\Delta f_i = f(y_{i,n}) - f(y_{i+1,n})$, и пусть ε' — любое фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Обозначим $I = [a - \varepsilon', b + \varepsilon']$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min\limits_{i:\, \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$,

$d_2(\mathfrak{M},n) = \max\limits_{i\colon \Delta_{i,n}\subset I} |\Delta_{i,n}|$, $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M},f) = \sum\limits_{i\colon |y_{p,n}-y_{i,n}|<\varepsilon} \frac{|\Delta f_i|}{|p-i|+1}$, $T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M},f) = \max\limits_{p\colon y_{p,n}\in[a,b]} T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M},f)$. Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ полагаем $d(A) := \min\limits_{i,j}\{|a_i - a_j| : a_i \neq a_j\}$.

Следующее утверждение, схема доказательства которого приведена в настоящей заметке, дает утвердительный ответ на вопрос о наличии интерполяционного аналога усиленного C–свойства ([1], см. также [14]) для матриц класса $M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Кроме того, оно обобщает результат из [3] на случай произвольных показателей α, $\beta > -1$.

Теорема. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — произвольная последовательность и $\alpha, \beta > -1$. Тогда существует матрица узлов $\mathfrak{M}_\gamma \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ такая, что для любых $f \in C[-1,1]$, $-1 < a < b < 1$, и $0 < \delta < b-a$ найдутся функция $g \in C[-1,1]$ и множество $E \subset [a,b]$, $\mathrm{mes}E > b-a-\delta$, для которых $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0$.*

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть верно* (1). *Тогда существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ со следующим свойством: для любой $f \in C[-1;1]$ и любой матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$, условие $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M},f) = 0$ влечет за собой равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - L_n(\mathfrak{M},f,\cdot)\|_{C[a,b]} = 0$.*

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 1 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть, далее, $r > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $a - \varepsilon' =: \lambda_{m+1} < \lambda_m < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 := b + \varepsilon'$, $d(\Lambda) > r$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(r)$, зависящий только от r, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p \in J_n(a,b) := \{p:\ y_{p,n} \in [a,b]\}$ будут верны неравенства $Q_{p,n}(\Lambda, r) := \sum\limits_i (|i-p|+1)^{-1} \le 3$, где суммирование идет по тем i для которых $\Delta_{i,n} \subset I$ и $\Delta_{i,n} \cap (\Lambda\backslash\{\lambda_0; \lambda_{m+1}\}) \neq \varnothing$.*

Лемма 1 может быть доказана с использованием представления для разности $f(x) - L_n(\mathfrak{M},f,x)$ из [4], доказательство леммы 2 тривиально.

Опишем теперь схему доказательства теоремы.

Шаг 1. Пусть заданы произвольные $f \in C[-1,1]$ и $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$, числа $a, b, \varepsilon, \varepsilon'$ выбраны и зафиксированы как указано выше, и пусть $\gamma^* = \{\gamma^*{}_n\}$, $0 < \gamma^*{}_n < \gamma_n$, — последовательность, существование которой гарантирует лемма 1. Выберем какую-либо матрицу $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma^*) \subset M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ и зафиксируем ее, потребовав, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -1 + k2^{1-j}$, $k = 1,\dots,2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $I_{k,j} := [-1 + (k-1)2^{1-j}, -1 + k2^{1-j}]$, и определим на $[-1,1]$ функции $\tilde{f}_j(x) := \min\limits_{t\in I_{k,j}} f(t)$, $x \in I_{k,j}$, $k = 1,...,2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\{\tilde{f}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-1,1]$. Пусть $f_j(x) := \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x)$, $\tilde{f}_0(x) \equiv 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к f на $[-1,1]$.

Шаг 2. Зафиксируем $0 < \delta < b-a$ и последовательность $\{N_j\} \subset \mathbb{N}$, $N_j \uparrow \infty$. Для каждого $j = 1,2...$ строится функция $g_j \in C(I)$ такая, что

$$\operatorname{mes}\{t \in [-1,1] : f_j\,(t) \neq g_j\,(t)\} < 2^{-j}\delta; \tag{2}$$

$$\max_n T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \ \le C\,\|f_j\|_{C(I)} \ \to \ \ 0 \text{ при } j \to \infty; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0. \tag{4}$$

Кроме того, при $j \ge 2$ функция g_j удовлетворяет условиям:

$$0 \le g_j(x) \le f_j(x), \quad x \in I; \tag{5}$$

$$T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0, \quad n = 1,...,N_j. \tag{6}$$

Опишем построение функций $g_j(x)$, $j = 1,2,\ldots$ Для g_1 полагаем $g_1(x) = f(x)$ при $x \in [-1,1]\backslash I$. На I в качестве g_1 возьмем f_1, заменив ее в окрестностях точек разрыва на линейную так, чтобы выполнялись условия $g_1 \in C[-1,1]$ и (2). Предположим теперь, что $j \ge 2$ и построим функцию g_j. Обозначим через L множество точек разрыва функции f_j, лежащих в I. Выберем номер $M_j > N_j$ так, чтобы при $n > M_j$ для всех индексов i суммы $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, f)$, $p \in J_n(a,b)$, выполнялось условие $\Delta_{i,n} \in I$ и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in I : 1 \le s \le M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$ для которого $Q_{n,p}(D_0) \le 3 \ \ \forall\, n \ge \mu(0)$, $p \in J_n(a,b)$. Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma_l \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t-\sigma_0, t+\sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1}d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in I : M_j + 1 \le s \le \mu(0)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;

3) $\max\{n : \ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Для $x \in [-1,1]$ положим

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_0; \\ f_j(x), & \text{если } x \in [-1,1]\backslash \cup_{t\in D_0}(t-\sigma_0, t+\sigma_0); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_k, t] \text{ и } [t, t+\sigma_k],\ t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0,\ldots,D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0,\ldots,\sigma_{l-1}$ и построены функции $g_{0,j},\ldots,g_{l-1,j}$, $l \ge 1$. Определим

D_l, σ_l и построим $g_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t \in D_s} [t-\sigma_s, t+\sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} : \; s = M_j + l, \; y_{i,s} \in I \backslash E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t \in D_s} \{t-\sigma_s; \; t; \; t+\sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}(D_l \cup P_{l-1}) < 3$, $\forall n \geq \mu(l), \; p \in J_n(a,b)$;

2) $\mu(l) > \min\{n : \; d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \leq \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t-\sigma_l, t+\sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1} d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in I \backslash E_{0,l-1} : \; M_j + l \leq s \leq \mu(l)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;

3) $\max\{n : \; d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} : = f_j(x), \; x \in I_{k,j}$ и для $x \in [-1,1]$ положим

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum_{s=1}^{l} 2^{-l}, & \text{если } x \in D_l \cap I_{k,j}; \\ g_{l-1,j}(x), & \text{если } x \in [-1,1] \backslash \cup_{t \in D_l} (t-\sigma_l, t+\sigma_l); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_l, t] \text{ и } [t, t+\sigma_l], \; t \in D_l. \end{cases}$$

Окончательно для $j \geq 2$ полагаем $g_j(x) = \lim\limits_{l \to \infty} g_{l,j}(x), \; x \in [-1,1]$, после чего проверяем выполнение условий (2)–(6) для всех $j \in \mathbb{N}$.

Шаг 3. Полагаем $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x), \;\; x \in [-1,1]$, и проверяем, что $g \in C[-1,1]$, $\operatorname{mes}\{x \in [-1,1] : f(x) \neq g(x)\} < \delta$, а также, что за счет выбора последовательности $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно добиться выполнения условия $\lim\limits_{n \to \infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g) = 0$. В силу леммы 1 это равенство влечет за собой равенство $\lim\limits_{n \to \infty} \|g - L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot)\|_{C[a,b]} = 0$. Таким образом, матрица $\mathfrak{M}_\gamma$ и функция g — искомые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Menchoff D.* Sur les seéries de Fourier des fonctions continues // Матем. сб. 1940. Т. 8 (50), №. 3. С. 493–518.

[2] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматлит, 1961. 936 с.

[3] *Новиков В. В.* Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Лежандра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2017. Т. 17, вып. 4. С. 344–401.

[4] *Неваи Г. П.* Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1974. Vol. 25, iss. 1–2. P. 123–144.