УДК 517.5

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА И АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ–ЭРМИТА[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)
semen.nasyrov@yandex.ru

В теории диагональных аппроксимаций Паде–Эрмита важную роль играет приближение многозначных аналитических функций с конечным числом особых точек и нахождение максимальных областей их сходимости. Эти области связаны с так называемым разложением Наттолла компактных римановых поверхностей, индуцированным некоторым абелевым интегралом. А. И. Аптекаревым и Д. Н. Туляковым была рассмотрена задача о разложении Наттолла трехлистного комплексного тора с тремя точками ветвления, которые образуют треугольник, близкий к правильному. С использованием эллиптических функций Вейерштрасса мы исследуем ситуацию в случае произвольного расположения точек.

Ключевые слова: диагональные аппроксимации Паде–Эрмита, компактная риманова поверхность, разложение Наттолла, квадратичный дифференциал, комплексный тор.

WEIERSTRASS ELLIPTIC FUNCTIONS AND PADE-HERMITE APPROXIMATIONS[1]

S. R. Nasyrov (Kazan, Russia)
semen.nasyrov@yandex.ru

In the theory of diagonal Pade–Hermite approximations, approximation of multivalued analytic functions with a finite number of singularities plays an important role as long as finding of maximal domains of their convergence. The domains are connected with the so-called Nuttall decomposition of compact Riemann surfaces induced by some Abelian differential. A. I. Aptekarev and D. N. Tulyakov investigated the problem on the Nuttall decomposition for a complex torus with three branch-points, when the points form a triangle close to a regular one. With the help of the Weierstrass elliptic functions, we study the problem for the case of arbitrary location of the branch-points.

Keywords: diagonal Pade–Hermite approximations, compact Riemann surface, Nuttall decomposition, quadratic differential, complex torus.

Введение

Сначала напомним определение диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде II. Пусть функции f_j, $1 \leq j \leq m$, голоморфны в окрестности ∞. Их аппроксимациями Эрмита–Паде типа II называются рациональные функции $Q_{nj}(\tau)/P_n(\tau)$, $1 \leq j \leq m$, такие, что

$$P_n(\tau)f_j(\tau) - Q_{nj}(\tau) = O(\tau^{-(n+1)}),\ \tau \to \infty, \quad 1 \leq j \leq m,$$

и $\deg P_n \leq mn$.

Представляет интерес случай, когда функции f_j могут быть продолжены аналитически из бесконечности по любому пути на плоскости, лежащему вне некоторого компакта $\mathcal{E}$. Актуальным является определение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Республики Татарстан (проект № 18-41-160003).

[1]The article is done with the financial support of the RFBR and the Government of the Republic of Tatarstan (project No 18-41-160003).

максимальных областей сходимости указанных аппроксимантов к заданной функции.

В случае одной функции эта проблема была исследована Шталем [1, 2], который установил, что такая область является внешностью некоторого компакта, который ограничен ортогональными критическими траекториями квадратичного дифференциала, связанного с функцией Грина внешности этого компакта.

В случае $m \geq 1$ вопрос остается открытым даже в случае, когда множество $\mathcal{E}$ конечно. Наттолл [3] предположил, что асимптотика аппроксимаций Паде–Эрмита связана с $(m+1)$-листной компактной римановой поверхностью S, накрывающей сферу Римана, точки ветвления которой лежат над множеством $\mathcal{E}$. Обозначим через p проектирующее отображение, $p : S \to \overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим абелев интеграл G на S, который регулярен в любой точке S, кроме точек P_0, $P_1, \dots, P_m$, лежащих над бесконечно удаленной точкой. В точках P_j этот интеграл G имеет асимптотику

$$G(\tau) \sim \begin{cases} m \ln \tau, & \tau \to P_0, \\ -\ln \tau, & \tau \to P_j, \quad 1 \leq j \leq m. \end{cases} \tag{1}$$

Кроме того, все периоды G чисто мнимые. Для каждого $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$ существует ровно $(m+1)$ точка поверхности S, лежащая над ней. Обозначим эти точки через $\tau^{(0)}$, $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(m)}$. Введем также обозначения $g_j(\tau) := g(\tau^{(j)})$. Понятно, что нумерацию точек $\tau^{(0)}$, $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(m)}$ можно выбрать так, чтобы $g_0(\tau) \geq g_1(\tau) \geq \ldots \geq g_m(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. Заметим, что в точках, где значения некоторых из g_j совпадают, такая нумерация определена неоднозначно. Рассмотрим множество точек τ на плоскости, в которых значения $g_j(\tau)$ попарно различны. Тогда для таких τ имеем $g_0(\tau) > g_1(\tau) > \ldots > g_m(\tau)$.

Рассмотрим множества

$$S_j := \{P \in S : P = \tau^{(j)} \text{ для точки } \tau = p(P)\}.$$

Множество S_j назовем j-м листом поверхности S. Отметим, что S получается из листов S_j, $0 \leq j \leq m$, склеиванием вдоль некоторых кусочно-гладких кривых, и проекция граничных кривых ∂S_j листов S_j на сферу Римана также состоит из конечного числа аналитических дуг.

Даже когда $m = 2$, и число точек множества $\mathcal{E}$ невелико, ситуация остается не исследованной. Рассмотрим, например, риманову поверхность функции

$$\omega = \sqrt[3]{(\tau - a_1)(\tau - a_2)(\tau - a_3)} \tag{2}$$

и построим для нее функции g_j, $j = 0, 1, 2$. В работе А. И. Аптекарева и Д. Н. Тулякова [4] исследована геометрическая структура множества

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid \exists j, k \in \{0, 1, 2\} : j \neq k \text{ и } g_j(\tau) = g_k(\tau)\}$$

в случае, когда треугольник с вершинами a_1, a_2, a_3 достаточно близок к правильному. Мы исследуем ситуацию в случае произвольного расположения на плоскости точек a_1, a_2, a_3.

1. Униформизация комплексного тора и построение абелева интеграла

Рассмотрим трехлистную компактную риманову поверхность T над сферой Римана, имеющую три точки ветвления, лежащие над точками a_1, a_2 и a_3. Эта поверхность имеет род один, т. е является комплексным тором. Построим ее универсальное накрытие. Для этого сначала применим в плоскости τ дробно-линейное преобразование, переводящее точки a_1, a_2 и a_3 в вершины правильного треугольника, которые лежат на единичной окружности и являются корнями кубическими из 1 так, чтобы бесконечно удаленной точке соответствовала точка z_0, лежащая в замыкании единичного круга Δ. Отметим, что точка z_0 лежит на границе круга тогда и только тогда, когда исходные точки a_1, a_2 и a_3 лежат на одной прямой.

При данном дробно-линейном преобразовании тор T перейдет в риманову поверхность R функции $w = \sqrt[3]{z^3 - 1}$, которая обладает богатой симметрией, а асимметрия исходного треугольника проявляется в асимметричном расположении точки z_0 относительно вершин правильного треугольника.

Если конформно отобразить правильный треугольник Δ с длиной сторон, равной единице, и вершинами в точках $A(0)$, $B(e^{\pi/6})$ и $C(e^{-\pi/6}$ на Δ, то это конформное отображение продолжается по симметрии на всю плоскость и дает универсальное накрытие для R. Для построения абелева интеграла G достаточно построить соответствующий абелев дифференциал $\widetilde{G}$ на универсальном накрытии, т. е. на комплексной плоскости.

Пусть α — точка из замыкания треугольника Δ, соответствующая точке z_0. Используя эллиптические функции Вейерштрасса, мы можем показать, что $\widetilde{G}$ имеет вид

$$\widetilde{G}(z) = -2\ln\sigma(z-\alpha) + \ln\sigma(z - e^{2\pi i/3}\alpha) + \ln\sigma(z - e^{-2\pi i/3}\alpha) - \sqrt{3}\eta_1\overline{\alpha}z,$$

Здесь $\eta_1 = 2\zeta(\omega_1/2)$, а $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ — эллиптические дзета- и сигма-функции Вейерштрасса с периодами $\omega_1 = \sqrt{3}$ и $\omega_2 = \sqrt{3}e^{i\pi/3}$.

Введем функцию

$$u(z) := \ln|\sigma(z - e^{-2\pi i/3}\alpha)| - \ln|\sigma(z - e^{2\pi i/3}\alpha)| - \eta_1 \mathrm{Im}\,(\overline{\alpha}z).$$

Эта функция гармонична и двоякопериодична на универсальном накрытии. Введем также множества $L_{12} = \{z \in \mathbb{C} : u(z) < 0\}$, $L_{21} = \{z \in \mathbb{C} :$

$u(z) > 0\}$, и их повороты $L_{01} = e^{2\pi i/3} L_{12}$, $L_{10} = e^{2\pi i/3} L_{21}$, $L_{20} = e^{-2\pi i/3} L_{12}$, $L_{02} = e^{-2\pi i/3} L_{20}$. Тогда множества $\widetilde{S}_j$, $0 \le j \le 2$, на универсальном накрытии, соответствующие листам Наттолла, имеют вид

$$\widetilde{S}_0 = L_{01} \cap L_{02}, \quad \widetilde{S}_2 = L_{10} \cap L_{20}, \quad \widetilde{S}_1 = (L_{01} \cap L_{20}) \cup (L_{02} \cap L_{10}).$$

2. Структура листов Наттолла

Из полученных результатов следует, что для описания листов Наттолла достаточно описать нулевое множество $L(u,0) := \{z \in \mathbb{C} \mid u(z) = 0\}$ функции $u(z)$, которое является общей границей множеств L_{12} и L_{21}. Это нулевое множество зависит от параметра α. Точка α может быть любой точкой треугольника Δ, за исключением вершин. Нетрудно показать, что в каждом параллелограмме периодов градиент функции $u(z)$ имеет ровно две критические точки (в случае, когда α совпадает с центром треугольника Δ, эти две точки сливаются в одну точку двойной кратности, в противном случае они различны).

Нами установлено, что критические точки лежат в множестве $L(u,0)$ тогда и только тогда, когда α лежит либо на одной из перпендикуляров, опущенных из центра треугольника на его стороны, либо на одной из этих сторон . Это означает, что либо треугольник с вершинами в точках a_1, a_2 и a_3 является равнобедренным и угол при его вершине больше, чем $\pi/3$, либо точки a_1, a_2 и a_3 лежат на одной прямой. Особо следует выделить случай, когда α совпадает с центром треугольника Δ. Это — случай правильного треугольника с вершинами в точках a_1, a_2 и a_3.

В каждом из случаев описана дифференциально-топологическая структура множества $L(u,0)$. Линии $\{u(z) \equiv \mathrm{const}\}$ являются траекториями некоторого квадратичного дифференциала, связанного с $\widetilde{G}$. Во всех случаях описана структура этих траекторий.

Наконец, исследована структура множеств $\widetilde{S}_j$, $0 \le j \le 2$, на универсальном накрытии, соответствующих листам Наттолла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Stahl H.* The structure of extremal domains associated with an analytic function // Complex Variables Theory Appl. 1985. Vol. 4, № 4. P. 339–354.

[2] *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex-valued weight function. I, II // Constr. Approx. 1986. Vol. 2, № 1. P. 225–240, 241–251.

[3] *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 42, № 4. P. 299–386.

[4] *Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.* Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80, № 6. С. 5–42.