УДК 517.518.126

ОБ АБСОЛЮТНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ПО РИМАНУ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

К. М. Нараленков (Москва, Россия)
naralenkov@gmail.com

В настоящей заметке получены дескриптивные, то есть описывающие свойства неопределённых интегралов, необходимые и достаточные условия характеризующие абсолютно интегрируемые по Биркгофу и интегрируемые по Мак-Шейну функции в классе измеримых по Риману интегрируемых по Хенстоку функций.

Ключевые слова: измеримая по Риману функция, ограниченная вариация, AC_* и AC^*_δ функции, интегралы Биркгофа, Мак-Шейна, Хенстока, Петтиса.

ON ABSOLUTE INTEGRABILITY OF RIEMANN-MEASURABLE VECTOR-VALUED FUNCTIONS

K. M. Naralenkov (Moscow, Russia)
naralenkov@gmail.com

In this article we obtain descriptive, that is, describing the properties of the indefinite integrals, necessary and sufficient conditions that characterize absolutely Birkhoff integrable and McShane integrable functions within the Riemann-measurable Henstock integrable function class.

Keywords: Riemann-measurable function, bounded variation, AC_* and AC^*_δ functions, Birkhoff, McShane, Henstock, and Pettis integrals.

Хорошо известно, что для действительнозначных функций интеграл Мак-Шейна есть *абсолютный* интеграл, эквивалентный интегралу Лебега, в то время как интеграл Хенстока, естественным образом расширяющий интеграл Мак-Шейна в смысле риманового определения, является *неабсолютным* и эквивалентен узкому интегралу Данжуа. С дескриптивной точки зрения неопределённые интегралы абсолютно интегрируемых функций являются функциями *ограниченной вариации*, что полностью характеризует их внутри класса неопределённых интегралов Хенстока [1]. Важно отметить, что доказательство данного факта существенно опирается на лемму Сакса–Хенстока в сильной форме, которая уже не верна для любого бесконечномерного пространства значений.

Аналогами интеграла Лебега для векторнозначных функций являются интегралы Биркгофа и Мак-Шейна, базирующиеся на *римановых* суммах, а также, наиболее широкий из классических векторнозначных обобщений интеграла Лебега, интеграл Петтиса, в основе определения которого лежит *барицентрическая* формула. Оказывается, что эти три понятия интеграла эквивалентны в классе *измеримых по Бохнеру* функций, но существенно расходятся для *скалярно измеримых* функций с несепарабельной областью значений. Понятие *измеримости по Риману* естественным образом возникает при изучении векторнозначных обобщений интеграла Римана [2]. Все измеримые по Бохнеру функции измеримы по Риману, однако измеримые по Риману функции могут иметь несепарабельную область значений. Тем не менее, интегралы Биркгофа, Мак-Шейна и Петтиса оказываются эквивалентны в классе функций измеримых по Риману [2], [3].

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a, b]$ соответственно. Если $F : [a, b] \to X$, то $\Delta F(I)$ обозначает *приращение* F на I. Положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Если $(T, \mathscr{T})$ — топологическое пространство, то $\operatorname{dens}(T, \mathscr{T})$ обозначает наименьший кардинал, для которого в $(T, \mathscr{T})$ существует плотное множество такой мощности. Кардинал $\varkappa(\mu)$ определяется наименьший кардинал $\varkappa$ такой, что существует объединение $\varkappa$ множеств нулевой меры Лебега, имеющее положительную внешнюю меру Лебега.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ есть конечный набор $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a, b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a, b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a, b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a, b]$.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a, b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ *$\mathscr{M}$-интегрируема* (*$\mathscr{H}$-интегрируема*) на $[a, b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a, b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a, b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ. Функция f *$\mathscr{M}$-интегрируема* (*$\mathscr{H}$-интегрируема*) на множестве E если функция $f \cdot \chi_E$, где χ_E обозначает *характеристическую функцию* множества E, *$\mathscr{M}$-интегрируема* (*$\mathscr{H}$-интегрируема*) на $[a, b]$.

Разбиением Биркгофа множества E называется не более чем счётный набор $\Pi = \{E_k\}$ попарно не пресекающихся множеств покрывающих E. Пусть Γ и Π суть два разбиения Биркгофа множества E. Разбиение Γ *измельчает* разбиение Π если каждое множество из Γ является подмножеством некоторого множества из Π.

Определение 3. Функция $f : E \to X$ называется *(абсолютно) интегрируемой по Биркгофу* на E, с *(абсолютным) интегралом Биркгофа* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение Биркгофа Π множества E такое, что для каждого разбиения Биркгофа $\Gamma = \{E_k\}$, измельчающего Π, для всех $t_k \in E_k$ ряд $\sum\limits_k f(t_k)\mu(E_k)$ безусловно (абсолютно) сходится и выполняется неравенство

$$\left\| \sum_k f(t_k)\mu(E_k) - w \right\| < \varepsilon.$$

В работе [4] показано, что интеграл Биркгофа эквивалентен $\mathscr{M}$-интегралу.

Определение 4. Функция $f : E \to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Все $\mathscr{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathscr{M}$-интегралу ($\mathscr{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [2].

Определение 5. $F : [a, b] \to X$ есть *sVB функция* на $[a, b]$ если

$$\mathrm{sV}(F, [a, b]) = \sup \sum_{k=1}^{K} \|\Delta F(I_k)\| < \infty,$$

где супремум берется по всем наборам попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$.

Определение 6. $F : [a, b] \to X$ есть *AC_* (AC_δ^*) функция* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ ($\eta > 0$ и измеримый масштаб δ на

E) такое, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \Delta F(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для каждого конечного набора попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ (частичного разбиения Хенстока $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ отрезка $[a,b]$) с условием $\partial I_k \cap E \neq \varnothing$ ($t_k \in \partial I_k \cap E$, $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$) для всех k и $\sum\limits_{k=1}^{K} \mu(I_k) < \eta$.

Теорема 1. *Если $f : [a,b] \to X$ абсолютно интегрируема по Биркгофу на $[a,b]$, то неопределённый интеграл функции f есть sVB функция на $[a,b]$ и*

$$\mathrm{sV}\Bigl(\int\limits_a^{\cdot} f, [a,b]\Bigr) \leq \overline{\int\limits_{[a,b]}} \|f\| < \infty.$$

Теорема 2. *Функция $f : E \to X$ абсолютно интегрируема по Биркгофу на E тогда и только тогда, когда f измерима по Риману на E и $\overline{\int\limits_E} \|f\| < \infty$.*

Теорема 3. *Функция $f : [a,b] \to X$ $\mathscr{M}$-интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда f $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и неопределённый интеграл функции f есть AC_* функция на $[a,b]$.*

Теорема 4. *Функция $f : E \to X$ $\mathscr{M}$-интегрируема на E тогда и только тогда, когда f измерима по Риману и интегрируема по Петтису на E.*

Следствие 1. *Если функция $f : [a,b] \to X$ $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и неопределённый интеграл функции f есть sVB функция на $[a,b]$, то f $\mathscr{M}$-интегрируема на $[a,b]$. Если дополнительно $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \varkappa(\mu)$, то f абсолютно интегрируема по Биркгофу на $[a,b]$.*

Теорема 5. *Пусть функция $f : [a,b] \to X$ $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и $F : [a,b] \to X$ есть её неопределённый интеграл. Если F есть AC_* функция на E, то f $\mathscr{M}$-интегрируема на E.*

Теорема 6. *Пусть функция $f : [a,b] \to X$ $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и $F : [a,b] \to X$ есть её неопределённый интеграл. Если f $\mathscr{M}$-интегрируема на E, то F есть AC_δ^* функция на E.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bartle R. G.* A modern theory of integration. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 32. Providence : American Mathematical Society, 2001. 458 p.

[2] *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.

[3] *Caponetti D., Marraffa V., Naralenkov K.* On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // Monatsh. Math. 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.

[4] *Солодов А. П.* О границах обобщения интеграла Колмогорова // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272.