УДК 517.9

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Е. В. Назарова (Москва, Россия)

nazarovi@inbox.ru

В статье рассматривается интегральный оператор, ядро которого имеет разрывы первого рода на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. Получен аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: теорема Жордана – Дирихле, резольвента, собственные функции, инволюция.

AN ANALOGUE OF THE JORDAN – DIRICHLET THEOREM FOR A CLASS OF INTEGRAL OPERATORS WITH INVOLUTION

E. V. Nazarova (Moscow, Russia)

nazarovi@inbox.ru

In the paper, the integral operator with kernel having discontinuites of the first kind at the lines $t = x$ and $t = 1 - x$ is studied. An analogue of the Jordan – Dirichlet theorem on the convergence of expansions in eigen and associated functions of this operator is obtained.

Keywords: Jordan – Dirichlet theorem, resolvent, eigenfunctions, involution.

Рассматривается интегральный оператор вида

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha \int_0^x A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha^2 \neq 1$. На ядро $A(x,t)$ наложены следующие ограничения: $A(x,x) = 1$, $\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} = 0$.

Для разложений по собственным и присоединенным функциям данного оператора устанавливается аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье (см. [1, с. 121–122]).

Интегральный оператор (1) является представителем класса операторов, допускающих разрывы первого рода ядра на линиях $t = x$ и $t = 1-x$, а именно частным случаем оператора, исследуемого в работе [2]. В [3] получена теорема равносходимости разложений произвольной интегрируемой функции по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого оператора и разложений линейной комбинации функций $f(x)$ и $f(1-x)$ по обычной тригонометрической системе.

Основной результат (аналог теоремы Жордана – Дирихле)

Теорема. *Пусть ядро оператора A непрерывно дифференцируемо один раз по x и один раз по t при $0 \le t \le x \le 1$, выполняются условия:*

1) $\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} = 0$;

2) $A(x,x) \equiv 1$;

3) $\alpha^2 - 1 \neq 0$.

Тогда для любой функции $f(x) \in \overline{\Delta}_A$, где $\overline{\Delta}_A$ — замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0,1]$, имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda \right| = 0,$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ — резольвента Фредгольма оператора A, а r таково, что $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r, \ 0 \le \arg\lambda \le 2\pi\} \in S_{\delta_0}$. Здесь S_{δ_0} — область, получающаяся после удаления из λ-плоскости нулей некторой функции вместе с их δ_0-окрестностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961.

[2] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственым функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: https://doi.org/10.4213/sm601

[3] *Назарова Е. В., Халова В. А.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 313–330.DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-313-330