УДК 517.53

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЛАСТЯХ С АСИМПТОТИЧЕСКИ КОНФОРМНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Н. М. Махина (Брянск, Россия)
mahinanm@yandex.ru

В данной работе строится ограниченный интегральный оператор, отображающий весовое пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций, в случае, если данные пространства рассматриваются на произведениях областей с асимптотически конформными границами.

Ключевые слова: асимптотически конформная кривая, конформное отображение, проектор, произведение областей.

ON THE BOUNDEDNESS OF SOME INTEGRAL OPERATORS IN DOMAINS WITH ASYMPTOTICALLY CONFORMAL BOUNDARIES

N. M. Makhina (Bryansk, Russia)
mahinanm@yandex.ru

In this paper we construct a bounded integral operator, mapping the weight space of measurable functions on the corresponding space of analytic functions, if these spaces are considered on the products of domains with asymptotically conformal boundaries.

Keywords: asymptotically conformal curve, conformal mapping, projector, product of domains.

Пусть $E_p(G)$ — класс Смирнова в области G.

Обозначим через $L^p(G)$ — класс измеримых по Лебегу в области G функций, для которых

$$\|f\|^p_{L^p(G)} = \int\limits_G |f(z)|^p \, dm_2(z) < +\infty; 0 < p < +\infty,$$

где $dm_2(z)$ — плоская мера Лебега.

Из классической теоремы М. Рисса известно, что интеграл типа Коши по границе ∂G отображает пространство $L^p(G)$ на $E_p(G)$ при всех $1 < p \leq +\infty$. В то же время, исходя из результатов А. Н. Колмогорова, такой интегральный оператор не отображает пространство $L^1(G)$ на $E_1(G)$ даже в том случае, когда ∂G представляет собой единичную окружность. Дж. Ньюмен показал, что такого интегрального оператора вообще не существует. Однако, в пространствах Бергмана существует ограниченный проектор по плоской мере Лебега из $L^1(G)$ на соответствующее пространство Бергмана. Эти результаты были получены Ф. А. Шамояном в случае гладких контуров при всех $0 < p \leq 1$. А при $1 < p \leq +\infty$ такие результаты можно вывести из результатов М. Рисса.

Возможности распространения данных результатов на области с более общими границами рассматривались в работах отечественных и зарубежных авторов (см., подробно, [1] и литературу там).

Напомним, что класс (A) есть класс асимптотически конформных кривых Γ на комплексной плоскости, если справедливо

$$\mu(\delta) = \sup_{\substack{w_1, w_2 \in \partial G \\ |w_1 - w_2| \le \delta}} \sup_{w \in \Gamma'} \left(\frac{|w_1 - w| + |w_2 - w|}{|w_2 - w_1|} - 1 \right) \to 0, \delta \to 0,$$

где Γ' – кратчайшая дуга на границе $\Gamma = \partial G$, соединяющая точки w_1, w_2 (см. [2]). Свойства областей с асимптотически конформными границами, применяемые при доказательстве полученных результатов, изучались, в частности, в работах автора [3], [4].

Пространства функций на произведениях областей рассматривались, например, в работе [5].

Пусть G_j — некоторая односвязная область на комплексной плоскости, граница которой принадлежит классу (A) . Рассмотрим $\{G_j\}_{j=1}^m$ — множество таких областей и $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Обозначим $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ — множество измеримых в $\tilde{G}$ функций таких, что

$$\|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} = \int_{\tilde{G}} |f(w)|^p \, d^{\vec{\beta}}(w, \partial G) dm_{2m}(w) =$$

$$= \int_{G_1} ... \int_{G_m} |f(w_1, ..., w_m)|^p \prod_{j=1}^{m} d^{\beta_j}(w_j, \partial G_j) dm_2(w_j) < +\infty,$$

где $0 < p < +\infty, \vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_m), \beta_j > -1, j = \overline{1, m}; dm_{2m} = dm_2 ... dm_2$ — мера Лебега на $\tilde{G}$. Пусть также $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$.

В работе [1] доказан результат, касающийся существования ограниченного проектора из L^p-весовых пространств в соответствующие простарнства аналитических функций. В качестве дальнейшего распространения данного результата нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $\{G_j\}_{j=1}^m$ *— некоторое множество односвязных областей на комплексной плоскости с границами класса* (A)*,* $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Пусть также $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ *— множество функций, конформно отображающих единичный круг* S *на* G_j*,* $\varphi_j(0) = w_0^j$*,* $w_0^j \in G_j$*,* $\varphi_j'(0) > 0$*,* $\psi_j = \varphi_j^{-1}$*,* $j = \overline{1, m}$.

Тогда интегральный оператор вида

$$P_{\vec{\eta}}(f)(\vec{w}) \stackrel{def}{=} F(\vec{w}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\eta_j+1}{\pi} \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} f(\mu_1, ..., \mu_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{\left(1-|\psi_j(\mu_j)|^2\right)^{\eta_j} \left|\psi'_j(\mu_j)\right|^2}{\left(1-\overline{\psi_j(\mu_j)}\psi_j(w_j)\right)^{\eta_j+2}} dm_2(\mu_1)...dm_2(\mu_n)$$

непрерывно отображает $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ *на* $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$, $1 < p < +\infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1,m}$, *при всех* $\eta > \eta_0$, $\eta_0 = \eta_0(\vec{\beta})$, $j = \overline{1,m}$; *и существует такая положительная постоянная* $c = c(\vec{\beta}, p)$ *что справедлива оценка*

$$\|F\|_{A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} \leq c \|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Tkachenko N. M., Shamoyan F. A.* The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2009. Vol. 5(2). P. 192–210.

[2] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М. : Мир, 1969. 133 с.

[3] *Махина Н. М.* Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестн. МГОУ. 2017. Т. 2. С. 16–22.

[4] *Махина Н. М.* Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестн. Омского ГУ. 2018. Т. 23, № 2. С. 47–51.

[5] *Шамоян Р. Ф., Максаков С. П.* On some new estimates for a gradient of a function in product domains and related results // Проблемы физики, математики и техники. 2017. Т. 3(32). С. 69–74.