УДК 517.51+517.53

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ НА ПРЯМОЙ

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)
mardvilko@mail.ru

В данной работе описано поведение квазинормы производных произведения Бляшке в пространстве Лебега L_p на прямой. Результаты получены для всех значений параметра $0 < p < +\infty$. Ранее автором были изучены аналогичные вопросы для окружности.

Ключевые слова: произведения Бляшке, неравенства типа Бернштейна, рациональные функции.

DERIVATIVES OF BLASCHKE PRODUCTS ON THE STRAIGHT LINE

T. S. Mardvilko (Minsk, Belarus)
mardvilko@mail.ru

This paper describes the behavior of the seminorm for the derivatives of Blaschke products in the Lebesgue space L_p on a straight line. The results were obtained for all values of the parameter $0 < p < +\infty$. The similar results for the circle were obtained by the author earlier.

Keywords: Blaschke product, Bernstein type inequality, rational functions.

Введение

Ранее автором были получены экстремальные оценки квазинормы производных произведений Бляшке для круга [1,2]. В данном работе рассмотрены аналогичные задачи для прямой. Интересным является тот факт, что поведение квазинормы производных произведения Бляшке для круга в общем случае, отличается от поведения аналогичной квазинормы для прямой.

Через $L_p, 0 < p < \infty$, будем обозначать пространство Лебега измеримых комплексных функций на $\mathbb{R}$ с конечной квазинормой (нормой при $1 \le p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty.$$

Обозначим b_n произведение Бляшке порядка n с нулями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, лежащих в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}.$$

Введем также обозначение

$$\lambda(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2})}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $n, s \in \mathbb{N}$*. Тогда*

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty \text{ \textit{при} } 0 < p \le \frac{1}{s+1},$$

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} < +\infty \text{ \textit{при} } \frac{1}{s+1} < p < +\infty$$

при любых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$*.*

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*. Тогда*

$$\sup_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} = s!\lambda^s(1/s)n^s.$$

Теорема 3. *Пусть* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{1}{s+1} < p < +\infty, p \neq \frac{1}{s}$*. Тогда*

$$\sup_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*. Тогда*

$$\inf_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} > \frac{\pi^s(s-1)((s-2)!)^s}{16^s(s!)^{s-1}} n^s.$$

Теорема 5. *Пусть* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{1}{s+1} < p < +\infty, p \neq \frac{1}{s}$*. Тогда*

$$\inf_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Подробнее с приведенными результатами можно ознакомиться в работах [3, 4].

Заключение

Задача об исследовании поведения квазинормы производных произведения Бляшке возникла в результате исследования постоянной в неравенстве типа Бернштейна для высших производных рациональных функций, полученном А.А. Пекарским [5]. Упомянутое неравенство типа

Бернштейна в свою очередь применяется для получения обратных теорем рациональной аппроксимации [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Mardvilko T. S.* On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions // East journal on approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 31–42.

[2] *Мардвилко Т. С.* Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 10–16.

[3] *Мардвилко Т. С.* О значении постоянных в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций на прямой // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Серия 2. 2009. № 3 (27). С. 18–25.

[4] *Мардвилко Т. С.* Поведение L_p-квазинормы производных произведений Бляшке на прямой // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 4 (41). С. 1–4.

[5] *Пекарский А. А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166), № 4 (8). С. 571–588.

[6] *Lorenz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin : Springer-Verlag, 1996. 651 p.