УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, А. В. Новик (Томск, Россия)
nmd@math.tsu.ru

В этой статье мы рассмотрим экстремальные свойства отображения с s-усредненной характеристикой. Вариационный метод разработан и успешно применяется в теории плоских квазиконформных отображений для решения экстремальных задач. Мы применяем этот классический метод для решения экстремальных задач в классе отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: пространственный, отображение, негомеоморфный, геометрический, усредненный, характеристика, искажение, модуль семейства кривых.

DIFFERENTIAL PROPERTIES OF MAPS WITH S-AVERAGED CHARACTERISTIC

A. N. Malutina, A. V. Novik (Tomsk, Russia)
nmd@math.tsu.ru

In this article we will discuss the extremal properties of mappings with s-averaged characteristic. The variational method is developed and successfully applied in the theory of plane quasi-conformal maps for solving extreme problems. We apply this classical method to solve extreme problems in the class of maps with s-averaged characteristic.

Keywords: spatial, mapping, non-homomorphic, geometric, averaged, characteristic, distortion, modulus of a family of curves.

Пусть $D \subset R^n$-область и $f : D \to R^n$, $f \in W^1_{n,loc}$ — отображение области D, $n \geq 3$. Обозначим так же как и в [1] якобиан $(Jf)_x = def'(x)$, а также характеристики:

— внутренняя дилатация отображения f в точке x $K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l^n(f,x)}$, где

$$l(x,f) = l(f'(x)) = min_{|h|=1}|f'(x)h|; \tag{1}$$

— внешняя дилатация отображения f в точке x $K_O(x,f) = \frac{L^n(f,x)}{|J(x,f)|}$, где

$$L(x,f) = |f'(x)| = max_{|h|=1}|f'(x)h|. \tag{2}$$

При этом справедливы оценки (см., например, [1]) и неравенства, связывающие характеристики между собой

$$K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f), \tag{3}$$

$$K_O(x,f) \leq n^{\frac{n}{2}}\lambda(x,f) \leq n^{\frac{n}{2}}K_O(x,f) \leq n^{\frac{n}{2}}K_I^{n-1}(x,f). \tag{4}$$

Определение 1. *[2] Отображение $f : D \to R^n$ обладает N (N^{-1})-свойством (Лузина),если из условия $\nu(E) = 0$ следует, что $\nu(f(E) = 0$ ($\nu(f^{-1}(E) = 0$). Назовем гомеоморфизм f области D на область D'*

отображением класса $\widetilde{W}^1_{n,loc}(D')$, если $f \in W^1_{n,loc}(D)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(D')$, и обладает N и N^{-1}-свойствами.

Перейдем теперь к определению отображения с s-усредненной характеристикой.

Определение 2. Отображение $f : D \to R^n$ называется *отображением с $K_{O,S}$ усредненной характеристикой* (и принадлежит классу $K_{O,s}(D, D^*)$ (или $K^*_{O,s}(D, D^*)$) , если f — непрерывное, открытое, изолированное и

1)$f \in W^1_{n,loc}(D)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(D')$;

2) существует постоянная $K_{O,S} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство $K_{O,S}(f) = (\int_D K^s_O(x, f)d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \leq K_{O,S}$.

Аналогично определяются отображения с $K^*_{O,S}$, $K_{I,S}$, $K^*_{I,S}$ усредненной характеристикой [3].

Назовем локальный гомеоморфизм $f : D \to R^n$ отображением класса $\widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$. Пусть f — отображение с s-усредненной характеристикой, $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, $U \subset D$ — нормальная область (т. е. $f(\partial U) = \partial f(U)$,$x \in U$, $y \in f(U) \setminus f(B_f \cap U)$,$f^{-1}(y) = \{x_j\}$. Тогда существуют $V_j = U(x_j, f, r)$ — окрестности точек x_j, такие, что $f_j = f|_{V_j}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассматривать отображения $h_j : B^n(y, r)) \to U$, причем $f \circ h_j$ тождественное отображение. Если $h_j \in W^1_{n,loc}(B^n(y, r)$ и f — отображение с s-усредненной характеристикой, то по лемме 1 и [4] существует такое r_0, что $h_j = f^{-1}_j$ — квазиконформное в среднем отображение в шаре $B^n(y, r)$.

Если для любого $x \in D$ существует U-окрестность точки $x \in D$ такая, что $f|_U \in \widetilde{W}^1_n(U)$.

Известно [1, 4], что если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, то для любой точки $x \in U$ существует число $r_0(x)$, такое что окрестность $U(x, f, r)$ нормальна при $r \leq r_0(x)$. Обозначим через $i(x, f)$ верхнюю грань числа прообразов точек $y' \in B^n(y, r)$ в $U(x, f, r)$ при $r < r_0(x)$. Если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$ то $i(x, f)$ не зависит от r. Число $i(x, f)$ мы назовем кратностью ветвления в точке .

Пусть $V \subset U$ — нормальная область, $y \in f(V), \{x_k\} = f^{-1}(y) \cap V$. Тогда функция $i(y, f) = i(V, f) = \sum_k i(x_k, f)$ постоянна в $f(V)$, если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$. Все указанные свойства K —квазиконформных отображений можно найти в [5]. Множество B_f точек U, где f не является локальным гомеоморфизмом, называется множеством точек ветвления f.

Для негомеоморфных отображений мы построили обратное отображение f^{-1}_i такое, что $f \circ f^{-1}_i$ отображение и f, f^{-1}_i гомеоморфизмы. Пусть f — отображение с s-усредненной характеристикой область $V \subset U$ — нормальна и $f(V) = V^*$. Определим отображение $g_v : V^* \to R^n$ следующим образом: пусть $y \in V^*$, $f_i^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$, тогда $g_v(y) = \frac{1}{m}\sum_i i(x_i, f)x_i$, где $m = \sum i(x_i, f) = i(V, f)$.

Для построенного отображение $g_v(y) \in ACL^n(v^*)$ докажем сначала непрерывность отображения. Очевидно, что g_v непрерывно на множестве $V^*\setminus f(B_f \cap V)$. Возьмем точку $y \in f(B_f)$ и последовательность точек $\{y_i\}$, обладающую следующими свойствами: $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$ и $y_i \in V^* \setminus f(B_f \cap V)$. Пусть $f_i^{-1}(y) = \{x_i\}$,$f_i^{-1}(y_j) = \{x_j^k\}$ и $V_i = U(x_i, f, r)$ — непересекающиеся нормальные окрестности точек x_i. В каждой окрестности V_i находится $m_i = i(x_i, f)$ точек из множества $\{x_j^k\}$ и очевидно, что $\lim\limits_{j\to\infty} \sum_{k, x_i^k \in V_i} x_j^k = m_i x_i$. Поэтому $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m} x_j^k = \frac{1}{m}\sum i(x_i, f)x_i$. Так как $f(B_f)$ нигде не плотно, то отсюда следует, что g_v непрерывно.

Перейдем к доказательству абсолютной непрерывности g_v . В дальнейшем мы будем всюду писать B вместо B_f . Пусть $I^* \subset V^*$-отрезок, параллельный одной из осей координат. Мы можем считать отрезок I^* разрешимым и рассмотрим семейство кривых $\{\gamma_i\}$, $1 \le i \le m$, такое, что $f \circ \gamma_i = I^*$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $\gamma_i \cap \gamma_j \subset B$ и $f_i^{-1}(I^*) = \cup_{i=1}^{m} \gamma_i$. По лемме 7.10 из [9] для почти всех таких отрезков I^* кривые $\gamma_i : I^* \to R^n$ абсолютно непрерывны. Так как в каждой точке $x \in f_i^{-1}(I^*)$ пересекаются ровно в i(x,f) кривых γ_i , то $g_v|_{I^*} = \frac{1}{m}\sum \gamma_i$ и, следовательно, $g_v \in ACL(V^*)$.

Пусть теперь $y \in V^* \setminus f(B \cap V)$ и $f_i^{-1}(y) = \{x_i\}$. Существуют окрестности $V_i = U(x_i, f, r)$ точек x_i такие, что $f|_{V_i}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображения $f_i^{-1} : B^n(y, r) \to V$, причем $f \circ f_i^{-1}$ — тождественное отображение. Покажем, что отображения f_i^{-1} - то же отображения с s-усредненной характеристикой. В самом деле $f_i^{-1} \in W^1_{n,loc}(D \setminus B_f)$. Откуда следует, что

$$\int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} |\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y_k}|^n d\sigma_y \le \int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} K_O^s(y, f_i^{-1})|J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \le$$

$$\le \int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} K_O^{s\setminus(n-1)}(y, f_i^{-1})|J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \le$$

$$\le \int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} K_I^s(y, f_i^{-1})|J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \le \infty.$$

Итак мы доказали что, отображение f_i^{-1} есть отображение с s-усредненной характеристикой, принадлежит классу $f_i^{-1} \in W^1_{n,loc}(D \setminus B_f)$.

Кроме того, поскольку ACL^n -гомеоморфизмы обладают N и N^{-1}-свойством (см. определение1) или [2], то f и f_i^{-1} невырожденно дифференцируемы в своих областях задания [1, 4] и поэтому $K_i(y, f_i^{-1}) = K_O(x, f)$ для почти всех $y = f(x)$. Производя во втором интеграле замену переменных [7], получим

$$\int\limits_V K_O^{s'}(x, f) d\sigma_x \leq \int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V)} K_I^s(y, f) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y < \infty$$

.

Определение 3. Отображение $f : D \to D^*$ в некотором классе $f \in K(D, D^*) \subset K_{O,s}(D, D^*)$ (или $K_{O,s}^*(D, D^*)$) называется *экстремальным в классе* $K(D, D^*)$, если $K_{O,s}(f) \leq K_{O,s}(g)$ (или $K_{O,s}^*(f) \leq K_{O,s}^*(g)$) для всех отображений характеристики $K_{O,s}(x, g)$ от отображения $g \in K(D, D^*)$.

Теорема 1 [2]. *Пусть теперь* $s \leq \frac{2}{n-2}$ *и отображение с* s-*усредненной характеристикой* $f : D \to D^*$ *есть экстремальное отображение в классе* $K_{I,s}(D, D^*)$. *Тогда* $f \in W_2^2(D')$ *для любой подобласти* D' *такой, что* $J(x, f) > 0$ *на замыкании* $\bar{D}'$ *и* $\bar{D}' \subset D$.

Доказательство теоремы следует из теоремы 2 и [8, х II, лемма 4.6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск : Наука, 1983.

[2] *Севостьянов Е. А.* Об одном модульном неравенстве для кривых, вращающихся отображением вокруг себя // Тр. ИПММ НАН Украины. 2013. Т. 27. С. 209–216.

[3] *Malyutina A. N., Elizarova M. A.* Otobrazheniya s s-usrednennoj kharakteristikoj. Opredelenie i svoystva (Mappings with s-averaged characteristic. De nition and properties). LAMBERT Acad. Publ., 2013. 121 p.

[4] *Гольдштейн В. М., Водопьянов С. И.* Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 5. С. 1040–1042.

[5] *Vaisala J.* Lectures on n-dimentional quasiconformal mappings. Lectures and Notes in Math. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag, 1971. 144 p.

[6] *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.

[7] *Rado T., Reichelderfer R. V.* Continuous transformation in analisis. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1955. 442 p.

[8] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.

[9] *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1969. № 448. P. 1–40.