УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПО СОБОЛЕВУ И ПОРОЖДЕННОЙ СИСТЕМОЙ УОЛША[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, Россия)
rasuldev@gmail.com

Получены оценки скорости равномерного приближения функций из пространств Соболева частичными суммами рядов Фурье по системе функций, ортогональной по Соболеву и порожденной системой Уолша.

Ключевые слова: скалярное произведение типа Соболева, система Уолша, аппроксимативные свойства, пространство Соболева, ряд Фурье.

APPROXIMATION PROPERTIES OF FOURIER SERIES IN A SOBOLEV ORTHOGONAL SYSTEM, GENERATED BY WALSH SYSTEM[1]

M. G. Magomed-Kasumov (Makhachkala, Russia)
rasuldev@gmail.com

Uniform convergence rate estimation of Fourier series in a Sobolev orthogonal system, generated by Walsh system, to functions from Sobolev spaces are obtained.

Keywords: Sobolev orthogonality, Walsh system, approximation properties, Sobolev space, Fourier series.

Введение

Пусть L^p пространство измеримых на $[0,1]$ функций, таких что $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$. Через $W^r_{L^p}$ обозначим пространство заданных на отрезке $[0,1]$ непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L^p$. В пространстве $W^r_{L^2}$ определим скалярное произведение соболевского типа

$$\langle f, g\rangle = \sum_{s=0}^{r-1} f^{(s)}(0)g^{(s)}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)dt, \tag{1}$$

которое превращает $W^r_{L^2}$ в гильбертово пространство.

Обозначим через $\mathfrak{W} = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ систему функций Уолша в нумерации Пэли [1, с. 10]. Введем в рассмотрение новую систему функций $\mathfrak{W}_r$, $r \geq 1$, порожденную системой функций Уолша $\mathfrak{W}$ ($x \in [0,1]$):

$$w_{r,k}(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad 0 \leq k \leq r-1, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00477 мол_а).
[1]The article is done with the financial support of RFFI (project № 18-31-00477).

$$w_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} w_{k-r}(t)dt, \quad k \geq r. \tag{3}$$

Отметим, что $\mathfrak{W}_r \subset W^r_{L^1}$ при любом r.

Метод построения систем функций, ортогональных относительно скалярного произведения вида (1) и порожденных классическими ортогональными системами с помощью формул вида (2), (3), был предложен в работах И.И. Шарапудинова (см., например, [2]). На данный момент в той или иной степени исследованы алгебраические, асимптотические и аппроксимативные свойства соболевских систем, порожденных такими классическими ортогональными системами, как система функций Хаара [2] и Уолша [3], система полиномов Чебышева [4], Лежандра, Якоби [5], Лагерра [6], система полиномов Чебышева дискретной переменной [7], система полиномов Мейкснера [8, 9] и др.

Из общих результатов, полученных в [2], вытекает, что система функций $\mathfrak{W}_r$ полна в $W^r_{L^2}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1). Поэтому для функций $f \in W^r_{L^2}$ можно рассматривать ряд Фурье по этой системе. Частичные суммы порядка n этих рядов будем обозначать через $S_{r,n}(f,x)$:

$$S_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x).$$

Можно показать, что частичная сумма $S_{r,n}(f,x)$ представима следующим образом:

$$S_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x), \quad n > r,$$

где $c_{r,k} = \int_0^1 f^{(r)}(t) w_{k-r}(t)dt$.

В [2] было показано, что ряды Фурье по системам вида $\mathfrak{W}_r$ в общем случае равномерно сходятся к функциям из $W^r_{L^2}$. Нетрудно заметить, что указанные ряды Фурье можно определить и для функций $f \in W^r_{L^p}$, $p \geq 1$. В связи с этим возникают вопросы о сходимости (равномерной или поточечной) рядов Фурье по системам вида $\mathfrak{W}_r$ к функциям из пространств Соболева $W^r_{L^p}$ при различных $p \geq 1$. Для некоторых конкретных систем эти вопросы решены в некотором смысле окончательно. В частности, в [3] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Для любой функции $f \in W^r_{L^1}$, $r = 1, 2, \ldots$, ряд Фурье этой функции по системе $\mathfrak{W}_r$ равномерно на $[0,1]$ сходится к f.*

Целью данной работы является исследование скорости сходимости рядов Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ к функциям $f \in W^r_{L^1}$.

Основные результаты

Как известно, функции Уолша вполне естественным образом можно определить на группе, элементами которой являются последовательности нулей и единиц, с операцией покоординатного сложения по модулю 2. С помощью этой операции в теории рядов Уолша посредством специальных отображений вводится новое расстояние $\rho^*(t,x)$ на отрезке $[0,1]$, обладающее некоторыми преимуществами над стандартным расстоянием $\rho(t,x) = |t-x|$ [1, с. 20], и новый модуль непрерывности [1, с. 49]

$$\overset{*}{\omega}(\delta, f) = \sup_{\rho^*(t,x)<\delta} |f(t) - f(x)|, \quad t, x \in [0,1).$$

Теорема 1. *Для $f \in W^r_{L^1}$ при $n = 2^k + i$, $1 \le i \le 2^k$, $r \ge 1$, справедлива оценка*

$$|f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}_{r,r+n}(f,x)| \le \frac{x^{r-\nu}}{(r-\nu)!} \overset{*}{w}(\frac{1}{2^k}, f^{(r)})(2 + \frac{1}{2}L_n), \quad 0 \le \nu \le r-1,$$

где L_n константы Лебега для системы Уолша.

Теорема 2. *Для $f \in W^1_{L^1}$ при $n = 2^k + i$, $1 \le i \le 2^k$, имеет место оценка*

$$|f(x) - S_{1,1+n}(f,x)| \le \frac{5}{2}\omega_1(\frac{1}{2^k}, f'),$$

где $\omega_1(\delta, g) = \sup_{0\le h\le\delta} \int_0^1 |g(x+h) - g(x)|dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 344 с.

[2] *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 1. С. 225–258.

[3] *Магомед-Касумов М. Г.* Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 4. С. 545–552.

[4] *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г., Магомедов С. Р.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Т. 4. С. 1–14.

[5] *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 611–629.

[6] *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 440–467.

[7] *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2017. Т. 61, № 8. С. 67–79.

[8] *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321.

[9] *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395.