УДК 517.5

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И РИССОВСКИЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Хорошо известны необходимые условия на маску масштабирубщей функции, при которых система сдвигов будет ортонормированной или системой Рисса. Мы указываем класс масштабирующих функций, на котором эти условия становятся необходимыми и достаточными.

Ключевые слова: локальные поля, масштабирующая функция, система Рисса, деревья.

DISCRETE ORTHOGONAL AND RIESZ REFINABLE FUNCTIONS

S. F. Lukomskii (Saratov, Russia)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

The necessary conditions under which the shift system of a refinable function is orthogonal or Riesz system are well known. We indicate the class of refinable functions on which this condition is necessary and sufficient. Bibliography: 1 titles.

Keywords: local fields, refinable function, Riesz system, trees.

Введение

Если система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)$ есть ОНС в поле K положительной характеристики , то [1] для п.в. $\chi \in K_0^{\perp}$

$$\sum_{\mathbf{a}\in GF(p^s)} |m_0(\chi \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}})|^2 = 1,$$

где$GF(p^s)$ – конечное поле порядка p^s, K_0– единичный шар в K, $\mathbf{r}_0 \in K_0^{\perp} \setminus K_1^{\perp}$ — функции Радемахера. Это условие не является достаточным. Мы укажем класс масштабирующих функций, для которых это условие является необходимым и достаточным.Мы рассмотрим аналогичную задачу для масштабирующей функции Рисса и докажем что условие

$$0 < A \le \sum_{\mathbf{a}\in GF(p^s)} |m_0(\chi \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}})|^2 \le B < \infty$$

будет необходимым и достаточным для Риссовости масштабирующей функции на этом классе.

1. Локальное поле положительной характеристики и его характеры

Пусть $K = F^{(s)}$ локальное поле положительной характеристики p, элементами которого являются бесконечные последовательности
$a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots), \mathbf{a}_j \in GF(p^s)$ Будем рассматривать его как линейное пространство над конечным полем $GF(p^s)$. Произведение λa определяется покоординатно Если $\mathbf{a}_n \neq 0$, то $\|a\| = p^{-sn}$. Подгруппы

$$K_n = \{a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : n \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\},\ n \in \mathbb{Z}$$

образуют основную цепочку в K^+. Пусть фиксированы элементы $g_n \in K_n \setminus K_{n+1}$. Последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом в K. В дальнейшем будем считать, что $g_n = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{1}_n, \mathbf{0}_{n+1}, \dots)$, где $\mathbf{1}_n = (1, 0, ..., 0)$. Оператор растяжения $\mathcal{A}$ определяем равенством $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\lambda}_n g_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\lambda}_n g_{n-1}$. Пусть X - группа аддитивных характеров поля K. Любой характер $\chi \in X$ можно записать в виде произведения $\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_n = \overline{0, p-1})$, функций Радемахера $r_n(a) = e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)}}$, где $n = ks + l$, $0 \leq l < s$.. Если мы запишем характер χ в виде $\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$ и обозначим $\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} := r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$, где $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, ..., a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$ то мы можем записать характер χ как произведение $\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}$. Если $\mathbf{a}_k, \mathbf{u} \in GF(p^s)$, то $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u} g_j) = 1$ для любых $k \neq j$. Оператор растяжения в X определяется равенством $(\chi\mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$.

2. Масштабирующие функции Рисса в локальном поле простой характеристики

Let $K = F^{(s)}$ be a local field of characteristic p. Denote

$$H_0 = \{a : a = \mathbf{a}_{-1} g_{-1} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{a}_{-\nu} g_{-\nu},\ \nu \in \mathbb{N},\ \mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s)\},$$

Пусть $\varphi \in L_2(K)$ масштабирующая функция, т.е. φ решение уравнения $\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, которое может быть записано в частотной форме $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, где $m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h\in H_0} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$ есть маска масштабирующего уравнения. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе K_M с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K_{-N}$ обозначим $\mathfrak{D}_{K_M}(K_{-N})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично,
$\mathfrak{D}_{K_{-N}^{\perp}}({K_M}^{\perp})$ есть множество функций , постоянных на смежных классах по подгруппе $K_{-N}^{\perp}$ с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K_M^{\perp}$.

Определение. Пусть T — дерево, ориентированное к корню на множестве вершин $GF(p^s)$. Дерево T назовем N-*валидным*, если:

(а) вершины дерева есть элементы $\bar{\alpha} \in GF(p^s)$;

(б) корень дерева T есть $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$;

(в) для любых $j = 0, 1, ..., N-1$ множество T_j вершин j-го уровня есть множество $\{\mathbf{0}\}$;

(г) любой путь $(\bar{\alpha}_k \leftarrow \bar{\alpha}_{k+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \bar{\alpha}_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве T ровно 1 раз.

По N-валидному дереву T построим граф Γ следующим образом. Каждую вершину $\bar{\alpha}_{-n}$ уровня больше чем $N-1$ соединим с вершиной $\bar{\beta}_{-n+1}$ низшего уровня, для которой $\bar{\alpha}_{-n+j} = \bar{\beta}_{-n+j}$, $\overline{j = 1, N-1}$. Получим граф, в котором путь $\bar{\alpha}_{-n} \to ... \to \bar{\alpha}_{-n+N-1}$ присутствует несколько раз, но не более N. Обозначим $\{\alpha^*_{-n+N}\}$ совокупность вершин графа Γ, следующих за $\bar{\alpha}_{-n+N-1}$. Выбираем комплексные числа $\lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0}$ так, чтобы
(а$\lambda_{0,0,...,0} = 1$, (б)$\lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0} = 0$ for $\bar{\alpha}_0 \notin \{\bar{\alpha}^*_0\}$,
(с)$\sum_{\bar{\alpha}_0 \in \{\bar{\alpha}^*_0\}} |\lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0}|^2 > 0$. Определяем маску m_0 on $K_1^\perp$ равенствами

$$m_0(K^\perp_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\overline{\alpha}_{-N+1}}...\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0}) = \lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0}$$

периодически продолжаем ее на X и определяем масштабирующую функцию $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k})$. В этом случае скажем, что функция φ порождается деревом T. Множество функций, порожденных N-валидными деревьями обозначим через Φ. Таким ообразом, $\varphi \in \Phi$ тогда и только тогда, когда существует N-валидное дерево T, порождающее φ.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и m_0 соответствующая маска.*

(а) система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)_{h\in H_0}$ ортонормирована т. и т. т. когда для любых $\bar{\alpha}_{-N}, \bar{\alpha}_{-N+1}, \ldots, \bar{\alpha}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\sum_{\overline{\alpha}_0 \in GF(p^s)} |m_0(K^\perp_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}...\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0})|^2 = 1,$$

(б) система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)_{h\in H_0}$ есть система Рисса т. и т. т. когда существует $A \geq 1$ такое, что для любых $\bar{\alpha}_{-N}, \bar{\alpha}_{-N+1}, \ldots, \bar{\alpha}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\frac{1}{A} \leq \sum_{\overline{\alpha}_0 \in GF(p^s)} |m_0(K^\perp_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}...\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0})|^2 \leq A.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Jiang Huikun., Li Dengfeng, Jin Ning* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004.№ 294. P. 523–532.