УДК 517.518

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ ДВУМЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ИЗ СДВИГОВ ОДНОГО ИЗ НИХ[1]

Т. П. Лукашенко (Москва, Россия)

email: lukashenko@mail.ru

В ряде пространств двумерных тригонометрических многочленов указаны конструкции ортонормированных базисов из последовательных сдвигов одного многочлена. Также указывается способ построения ортоподобных систем (фреймов Парсеваля) из последовательных сдвигов одного многочлена в более широком классе пространств тригонометрических многочленов.

Ключевые слова: двумерные тригонометрические многочлены, сдвиги многочленов, ортонормированные системы, фреймы Парсеваля.

THE ORTHONORMAL BASES OF TWO-DIMENSIONAL TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS OF CONSECUTIVE SHIFTS OF ONE POLYNOMIAL[1]

T. P. Lukashenko ((Moscow, Russia)

email: lukashenko@mail.ru

In some spaces of two-dimensional trigonometric polinomials the orthonormal bases of consecutive shifts of one polinomial are constructed. Method for constructing of Parseval frames of consecutive shifts of a polinomial in wider classes of trigonometric polinomials are proposed.

Keywords: two-dimensional trigonometric polinomials, shift of a polinomials, orthonormal systems, Parseval frames.

Введение

В работах [1] и [2] в конечномерных пространствах одномерных тригонометрических многочленов рассматривались ортонормированные базисы из последовательных сдвигов одного многочлена. В пространствах $\mathbf{T}^n$ тригонометрических многочленов степени не выше n

$$T^n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

с действительными (или комплексными) коэффициентами a_k, b_k (соответственно, c_k) такие базисы существуют и они были указаны.

Пространство $\mathbf{T}^n$ тригонометрических многочленов степени не выше n имеет размерность $2n+1$ как над полем $\mathbf{R}$, так и над полем $\mathbf{C}$, и один

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

из ортонормированных базисов в нем образуют сдвиги нормированных ядер Дирихле

$$\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\left(x-\frac{2r\pi}{2n+1}\right)\right),$$

$r = 0, 1, \ldots, 2n$.

В [1] и [2] привелены и другие примеры ортонормированных базисов в пространствах $\mathbf{T_0^n}$, в [2] указан общий вид таких базисов. В данной работе рассматриваются тригонометрические многочлены двух переменных и базисы сдвигов в них.

1. Базисы сдвигов многочленов двух переменных

Рассмотрим пространство $\mathbf{T_{0,0}^{n,m}}$ тригонометрических многочленов двух переменных x, y степени не выше n по переменной x и степени не выше m по переменной y

$$T^{n,m}(x,y) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-m}^{m} c_{k,l}e^{i(kx+ly)}$$

с комплексными коэффициентами $c_{k,l}$, причем в случае действительных тригонометрических многочленов выполняются равенства $c_{k,l} = \overline{c_{-k,l}} = \overline{c_{k,-l}} = c_{-k,-l}$ (где черта сверху обозначает комплексное сопряжение).

Это пространство размерности $(2n+1)(2m+1)$ как в случае действительных многочленов, так и в случае комплексных.

Укадем ортонормированные базисы в нем из последовательных сдвигов одного многочлена.

Пусть $P(x)$ — одномерный тригонометрический многочлен. сдвиги которого $P(x+k\alpha)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{T}^n$ переменной x.

Как известно, для любой 2π-периодической функции f и любого $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+\alpha)\,dx.$$

Отсюда следует, что многочлен $P\left(x+(2n+1+j)\alpha\right)$ ортогонален всем многочленам $P\left(x+(2n+1+k)\alpha\right) = P(x+k\alpha)$, $k = 0, \ldots, j-1, j+1. \ldots .2n$, а значит, равен многочлену $P(x+j\alpha)$. Следовательно, число $(2n+1)\alpha$ кратно 2π. А тогда если целые числа k и l равны по модулю $(2n+1)$, то многочлены $P(x+k\alpha)$ и $P(x+l\alpha)$ равны.

Пусть $Q(y)$ — также одномерный тригонометрический многочлен, сдвиги которого $Q(y+l\beta)$, $l=0,1,\ldots,2m$, образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{T_0^m}$ переменной y.

Теорема. *Система сдвигов* $\left(j\alpha,\frac{j}{2n+1}\beta\right)$, $j=0,1,\ldots,(2n+1)(2m+1)-1$, *тригонометрического многочлена* $P(x)Q(y)$, *то есть многочлены*

$$P\left(x+j\alpha\right)Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right),$$

$j=0,1,\ldots,(2n+1)(2m+1)-1$, *образуют ортонормированный базис в пространстве* $\mathbf{T^{n,m}}$ *(как в действительном, так и в комплексном случае.*

Доказательство. Так как размерность $\mathbf{T_{0,0}^{n,m}}$ равна $(2n+1)(2m+1)$, то достаточно показать, что приведенные многочлены образуют ортонормированную систему. Если целые j и s не равны по модулю $2n+1$, то многочлены $P(x+j\alpha)$ и $P(x+s\alpha)$ ортогональны, а тогда ортогональны многочлены $P\left(x+j\alpha\right)Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)$ и $P\left(x+s\alpha\right)Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)$, ведь по теореме Фубини $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P\left(x+j\alpha\right)\cdot Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)\cdot\overline{P\left(x+s\alpha\right)}\cdot\overline{Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}P\left(x+j\alpha\right)\cdot\overline{P\left(x+s\alpha\right)}\,dx\cdot\int\limits_0^{2\pi}Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)\cdot\overline{Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)}\,dy=0$. А если $j=s$ по модулю $(2n+1)$, то многочлены $Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)$ и $Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)$ ортогональны и по той же формуле ортогональны многочлены $P\left(x+j\alpha\right)Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)$ и $P\left(x+s\alpha\right)Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)$. Теорема доказана.

2. О фреймах Парсеваля

Аналогичные ортонормированные бащисы строятся в пространствах $\mathbf{T_{0,\ldots,0}^{m_1,\ldots,m_n}}$ тригонометрических многочленов n переменных $x_1,\ldots,x_n$ степени не выше m_k по переменной x_k, $k=1,\ldots,n$, как в действительном, так и в комплексном случае,

Ортогональные проекции таких базисов на инвариантные относительно слвигов подпространства будут фреймами Парсеваля из последовательных сдвигов одного тригонометрического многочлена. Разумеется, такие системы могут содержать много больше элементов, чем размерность подпространства. Для одномерных тригонометрических многочленов вопрос существавания в данном подпространстве фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов одного многочлена в заданном количестве был решен А. В. Фадеевой в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Базисы тригонометрических многочленов из сдвигов ядер Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2014. № 5. P. 35–40.

[2] *Лукашенко Т. П.* Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, вып. 4, ч. 1. P. 111–122.

[3] *Фадеева А. В.* Фреймы Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции в пространствах тригонометрических многочленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2018. № 6. P. 30–36.