УДК 517.9

ЗАДАЧА СТЕЧКИНА НА КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Р. Р. Акопян (Екатеринбург, Россия)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G односвязная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ – жордановой спрямляемой кривой; γ_1 – измеримое подмножество Γ. Изучается задача наилучшего приближения производной в точке $z_0 \in G$ линейными ограниченными функционалами в $L^\infty(\gamma_1)$ на классе Q аналитических в G функций с граничными значениями на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$, ограниченными единицей. Получено полное точное решение.

Ключевые слова: наилучшее приближение неограниченных функционалов ограниченными, аналитические функции.

STECHKIN'S PROBLEM IN THE CLASS OF ANALYTIC AND BOUNDED FUNCTIONS[1]

R. R. Akopyan (Yekaterinburg, Russia)
RRAkopyan@mephi.ru

Let G be a simply connected domain in $\mathbb{C}$ with boundary Γ that is a closed rectifiable Jordan curve; γ_1 be an arbitrary measurable subset of Γ. We study the problem of the best approximation of the derivative at a point $z_0 \in G$ by bounded linear functionals in $L^\infty(\gamma_1)$ on the class Q of analytic functions with limit boundary values bounded by 1 on $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$. Complete exact solution of the problem is obtained.

Keywords: best approximation of an unbounded functional by bounded functionals, analytic functions.

В дальнейшем G – односвязная область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ. Пусть γ_1 – измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, т.е. $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$. Через $H(G) = H^\infty(G)$ обозначают класс Харди аналитических и ограниченных в G функций. В $H(G)$ выделим класс Q функций f, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \le 1$. Рассмотрим функционал $\Upsilon^1_{z_0}$, который ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 функции f значение её производной $f'(z_0)$ в точке z_0 области G. Пусть $\mathcal{L}(N)$ есть множество линейных ограниченных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, норма которых не превосходит числа $N \ge 0$. Величина

$$U(T) := \sup\{|f'(z_0) - Tf| \,:\, f \in Q\}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{L}(N)$ от функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) := \inf\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00336).
[1]The article is done with the financial support of RFFI (project № 18-01-00336).

есть *наилучшее приближение функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Задача (1) является частным случаем задачи Стечкина [4] приближения неограниченного оператора ограниченными на классе элементов банахова пространства; этой задаче к настоящему времени посвящено большое число исследований (см. работы [2], [3] и приведённую в них библ.). Исследования задачи (1) начато в работе [1].

Будем обозначать w гармоническую в области G функцию переменной z, значение которой в точке равно гармонической мере γ_1 относительно области G в этой точке и определяемую равенством

$$w(z) = w(z, \gamma_1, G) = \int_{\gamma_1} P(z,\zeta)\,|d\zeta|,$$

в котором $P(z,\zeta)$ – плотность гармонической меры области G.

Для $\delta \geq 0$ зададим аналитическую в области G функцию f_δ равенством $f_\delta(z) := \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right),\ z \in G$, где функция $u_\delta(z) := \ln\delta\, w(z),\ z \in G$, а $v_\delta(z) := \ln\delta\, v(z)$, v – функция, гармонически сопряжённая в области G к функции w.

Обозначим через $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$, соответственно, длину, направление и аргумент градиента гармонической меры γ_1 относительно области G в точке z_0, т.е. определяемые равенствами

$$\kappa = \kappa(z_0) := \left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0) := \frac{\overline{\nabla} w(z_0)}{\left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|}, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g – функция, задающая однолистное отображение области G на единичный круг, удовлетворяющая условиям $g(z_0) = 0,\quad g'(z_0) > 0$. Обозначим через $\eta(z_0)$ положительную величину $\eta(z_0) := 2g'(z_0)/\kappa(z_0)$.

На пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству $|\ln\delta| \geq \eta(z_0)$ определим функционал T^1_δ формулой

$$(T^1_\delta f)(z) := e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\, \frac{f_\delta(z_0)}{f_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\,|d\zeta|, \tag{2}$$

в которой

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z,\zeta) + \ln\delta\,\kappa\, P(z,\zeta).$$

Для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющих условию $|\ln\delta| < \eta(z_0)$, определим на области G функцию F_δ равенством

$$F_\delta(z) := \frac{g(z) - g_0}{1 - g(z)\,\overline{g_0}}\, f_\delta(z), \quad g_0 := -e^{it}\frac{\kappa(z_0)\,\ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it}\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

В этом случае определим функционал T_1^δ равенством

$$T_1^\delta f := e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{f_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta|, \tag{3}$$

где

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\, \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0,\zeta) + \kappa(z_0)\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) P(z_0,\zeta).$$

Теорема 1. *Для величины* (1) *справедливы утверждения.*

(I) *Если* $N > 0$ *имеет вид*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta}\, |\alpha \ln\delta + 1|, \quad |\ln\delta| \geq \eta(z_0),$$

то для величины (1) *справедливо равенство:*

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\beta \ln\delta - 1|.$$

Функционал T_δ^1, *определенный формулой* (2), *является функционалом наилучшего приближения.*

(II) *Если* $N > 0$ *имеет вид*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta} \left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln\delta| < \eta(z_0),$$

то для величины (1) *справедливо равенство:*

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha} \left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Функционалом наилучшего приближения является функционал T_δ^1, *определенный равенством* (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Akopyan R. R.* Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary // Analysis Math. 2018. Vol. 44, No. 1. Pp. 3–19.

[2] *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995, № 11. С. 42–68.

[3] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.

[4] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.