УДК 517.984, 517.956.32

МЕТОД А. П. ХРОМОВА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА

И. С. Ломов (Москва, Россия)

lomov@cs.msu.ru

Установлен критерий существования (единственного) классического решения смешанной задачи для телеграфного уравнения с суммируемым потенциалом. Рассмотрен случай периодических краевых условий. Решение получено в явном виде: оно записывается как ряд, представляющий собой обобщенную формулу Даламбера. Ряд сходится с экспоненциальной скоростью. При нулевом потенциале этот ряд переходит в обычную формулу Даламбера. Получены условия существования обобщенного решения задачи.

Ключевые слова: метод Фурье, резольвента оператора, формула Даламбера, спектр оператора, телеграфное уравнение, расходящиеся ряды.

A. P. KHROMOV'S METHOD FOR SOLVING A MIXED PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION. A GENERALIZED FORMULA OF D'ALEMBERT

I. S. Lomov (Moscow, Russia)

lomov@cs.msu.ru

A criterion is established for the existence of a (unique) classical solution to the mixed problem for a telegraph equation with a summable potential. The case of periodic boundary conditions is considered. The solution is obtained in an explicit form: it is written as a series, which is a generalized one of d'Alembert formula. Row converges with exponential rate. At zero potential, this series goes over to the usual d'Alembert formula. The conditions for the existence of a generalized solution to the problem are obtained.

Keywords: Fourier method, operator resolvent, d'Alembert formula, operator spectrum, telegraph equation, divergent series.

1. Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u^{(l)}(0,t) = u^{(l)}(1,t), \quad l = 0,1,\ t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где функции $q(x), \varphi(x)$– комплекснозначные, $q(x), \varphi(x) \in L(0,1)$, суммируемые функции.

Требуется решить две задачи: 1) найти точные условия существования и единственности классического решения задачи (1)–(3); 2) показать, что при перечисленных выше условиях на данные задачи классическое решение переходит в обобщенное решение задачи.

Классическим решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $\overline{Q} = [0,1] \times [0,\infty)$, причем функции $u'_x(x,t), u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны соответственно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$, удовлетворяющую почти всюду в Q уравнению (1) и условиям (2), (3).

Из приведенного определения следует, что необходимыми условиями существования классического решения задачи (1)–(3) являются следующие условия на $\varphi(x)$: функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$, $\varphi''(x) \in L(0,1)$ и $\varphi^{(l)}(0) = \varphi^{(l)}(1)$ для $l = 0,1$.

Для исследования задачи применяем метод А. П. Хромова [1–3], модифицировавшего метод Фурье путем использования резольвентного метода, привлечения идеи А. Н. Крылова [4] об ускорении сходимости рядов Фурье, связанных с дифференциальными операторами и применившего идею Л. Эйлера о работе с расходящимися рядами.

Ранее А. П. Хромовым и его учениками этот метод был применен к исследованию первой краевой задачи [1–3, 5, 6], при этом в работах [2, 3, 6] получен критерий существования классического решения задачи. Получены и условия существования обобщенного решения. В [5] исследована периодическая задача (1)–(3) с дополнительными условиями гладкости на данные задачи. В работе [3] впервые применен подход Л. Эйлера использования расходящихся рядов.

Первый результат данной работы сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и $\varphi^{(l)}(0) = \varphi^{(l)}(1)$ при $l = 0,1$. Это решение дается формулой*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{4}$$

где

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \tag{5}$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

$\tilde{\varphi}(x)$ есть 1-периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю прямую, $\tilde{f}_n(\eta,\tau)$ — 1-периодическая по η функция, $\tilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) \equiv -q(x)a_n(x,t)$ при $\eta \in [0,1]$, $n = 0,1,2,\ldots$.

2. Формализм метода

Продемонстрируем здесь процесс получения ряда $A(x,t)$ (4).

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье берем в виде ([2, 3, 6])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\oint\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\oint\limits_{\gamma_n}\Bigg)(R_\lambda\varphi)\cos\varrho t\,d\lambda, \tag{7}$$

где $R_\lambda = ((l-\lambda E)^{-1})$ — резольвента оператора L, действующего в $L_2(0,1)$, связанного с задачей (1)–(3):

$$L:\ ly = -y''(x) + q(x)y(x),\ \ y^{(l)}(0) = y^{(l)}(1),\ l = 0,1,$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, E – единичный оператор, $\lambda = \varrho^2$, $\operatorname{Re}\varrho \geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\varrho :\ |\varrho - 2\pi n| = \delta\}$, $n \geq n_0$, число $\delta > 0$ и достаточно мало, число $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, n_0 такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению λ_n оператора L и все γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Для получения формулы (4) проведем формальные преобразования представления (7) решения $u(x,t)$ задачи (1)–(3). При этом на данные задачи налагаем минимальные требования: q, $\varphi \in L(0,1)$, $f(x,t) \in L(Q_T)$, $Q_T = (0,1)\times(0,T)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Нам потребуется далее задача, получаемая из задачи (1)–(3) при замене уравнения (1) на неоднородное уравнение

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{8}$$

Формальное решение задачи (8), (2), (3) имеет вид ([2])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\oint\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\oint\limits_{\gamma_n}\Bigg)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\varrho t +$$

$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}\,d\tau\Bigg]d\lambda, \tag{9}$$

где $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что резольвента R_λ оператора L применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Обозначим через $Z(x,t,\varphi)$ ряд (7) — формальное решение задачи (1)–(3). Как показал А. П. Хромов [7], используя теорию расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера, ряд (9) можно преобразовать к следующему виду:

$$u(x,t) = Z(x,t,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{9.1}$$

Представим ряд $Z(x,t,\varphi)$ в виде

$$Z(x,t,\varphi) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{10}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть представление (7), где R_λ заменено на R_λ^0: R_λ^0 есть R_λ при $q(x)=0$ и имеет следующий вид:

$$(R_\lambda^0 g)(x) = -\frac{1}{2\varrho\sin\frac{\varrho}{2}} \int\limits_0^1 \cos\varrho(x-t+\frac{1}{2})g(t)\,dt - \frac{1}{\varrho}\int\limits_0^x \sin\varrho(x-t)g(t)\,dt. \tag{11}$$

Подставим (11) в выражение для $u_{01}(x,t)$. Так как теперь

$$u_{01}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 0}\oint\limits_{\gamma_n}(R_\lambda^0\varphi)(x)\cos\varrho t\,d\lambda,$$

то, применяя теорему о вычетах, получаем

$$\begin{aligned} u_{01}(x,t) &= \textstyle\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{1}{2\varrho\sin\frac{\varrho}{2}}\int\limits_0^1\cos\varrho(x-\tau+\frac{1}{2})\varphi(\tau)\,d\tau\cos\varrho t\,d\lambda = \\ &= (1,\varphi) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\big[(\varphi,\cos 2\pi n\tau)\cos 2\pi nx + (\varphi,\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx\big]\cos 2\pi nt. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы знаем сумму следующего ряда в случае его сходимости

$$(1,\varphi) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\big[(\varphi,\cos 2\pi n\tau)\cos 2\pi nx + (\varphi,\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx\big] = \tilde\varphi(x), \tag{13}$$

где $\tilde\varphi(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$, $\tilde\varphi(x)$ — 1-периодическая функция. Ряд (13) при $\varphi\in L(0,1)$, вообще говоря является расходящимся (пример А. Н. Колмогорова). Но мы теперь будем считать, что его сумма — функция $\tilde\varphi(x)$, как сумма расходящегося ряда в понимании Л. Эйлера. Из (13) и (12) следует, что

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)], \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0. \tag{14}$$

Правая часть (14) имеет смысл при любых $(x,t) \in (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, поэтому в этом случае $u_{01}(x,t)$ из (14) будем обозначать через $a_0(x,t)$. Получаем формулу (5) теоремы 1.

Так как функция $a_0(x,t)$ похожа на решение задачи (1)–(3) при $q(x)=0$, то функция $u_1(x,t)$ из представления (10) похожа на решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{15}$$

$$u_1^{(l)}(0,t) = u_1^{(l)}(1,t), \quad l=0,1,\ t\geq 0, \tag{16}$$

$$u_1(x,0)=0,\ u'_{1t}(x,0)=0, \quad x\in[0,1], \tag{17}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$. Поэтому от ряда для функции $u_1(x,t)$ из (10) перейдем, в силу (9.1), к формальному ряду для решения задачи (15)–(17), т. е. к ряду

$$u_1(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{18}$$

Представим

$$Z(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)) = Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)) + Z_1(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)),$$

где $Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))$ есть $Z(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))$ при $q(x)=0$. Но $Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))$, в силу (14), есть

$$Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)) = \frac{1}{2}[\tilde f_0(x+\eta,\tau) + \tilde f_0(x-\eta,\tau)],$$

где $\tilde f_0(\eta,\tau)$ — 1-периодическая функция по η при каждом τ, $\tilde f_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$. И поэтому $a_1(x,t)$ есть

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

и так далее, продолжаем этот процесс до бесконечности. В итоге от ряда (7) приходим к ряду (4) с коэффициентами (5), (6). Этим завершается формализм метода А. П. Хромова.

Далее формулируется последовательность утверждений, аналогичных утверждениям из [2, 3], доказывающих теорему 1, т. е., что ряд (4) действительно представляет единственное классическое решение исходной задачи.

3. Обобщенное решение

Теорема 2. *Если* $\varphi \in L(0,1)$, *то ряд* $A(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью в* $Q_T, \forall T > 0$.

Теорема 3. *Если* $\varphi \in L(0,1)$, *а* φ_h *удовлетворяет условиям теоремы 1 и* $\|\varphi_h - \varphi\| \to 0$ *при* $h \to 0$, *то соответствующие* φ_h *классические решения* $u_h(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *сходятся по норме* $L(Q_T)$ *к* $A(x,t)$, *т. е. в этом случае* $u(x,t) = A(x,t)$ *является обобщенным решением задачи* (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.

[2] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения, 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731.

[3] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288.

[4] *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

[5] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 229 – 241.

[6] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286 – 300.

[7] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунаpод. Сарат. зим. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. **??**–439.