УДК 517.518

О ДОПУСТИМОМ РОСТЕ ЛАКУН В СИСТЕМЕ УОЛША

С. В. Левизов (Владимир, Россия)
levizov@rambler.ru

исследуются условия, при которых для слабо лакунарных подсистем системы Уолша выполняется (или не выполняется) предельное соотношение вида закона повторного логарифма

Ключевые слова: система Уолша–Пэли, слабая лакунарность, закон повторного логарифма.

ABOUT THE PERMISSIBLE GROWTH OF LACUNES IN WALSH'S SYSTEM

S. V. Levizov (Vladimir, Russia)
levizov@rambler.ru

The conditions, under which the law of the iterated logarithmis for the weakly lacunary subsystems of the Walsh's system is valid (or not), are considered.

Keywords: Walsh–Paley's system, weakly lacunarity, law of the iterated logarithm.

Для системы функций Уолша (в нумерации Пэли) $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \le x \le 1$ (подробное определение см., например, в [1]) рассматривается подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$, где $\{n(k)\}$ — некоторая возрастающая последовательность номеров.

Говорят, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если имеет место равенство:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,(2N\log\log N)^{-1/2}\sum_{k=1}^{N}\varphi_{n(k)}(x) = 1 \quad \text{почти всюду.} \tag{1}$$

В [2] было доказано, что если последовательность $\{n(k)\}$ является лакунарной, т.е.

$$\frac{n(k+1)}{n(k)} > c > 1 \quad \text{для некоторого c,} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то равенство (1) имеет место.

В дальнейшем этот результат обобщался (см. [3–5]) на случай так называемой слабой лакунарности, когда

$$\frac{n(k+1)}{n(k)} \to 1 \quad \text{при} \quad k\to\infty; \quad \text{точнее,} \quad \frac{n(k+1)}{n(k)} > 1 + \frac{c}{k^{\alpha}}$$

для некоторого $c > 0$ и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Показатель α, регулирующий размеры лакун (пробелов) в последовательности $\{n(k)\}$, является «достаточным» для выполнения (1), если $\alpha < \frac{1}{2}$. В то же время ЗПЛ может выполняться и в случае более «густых» (с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$) последовательностей $\{n(k)\}$, если они подчинены условию "нерегулярной"лакунарности (см. об этом в [5]).

В критическом случае (для «рубежа» $\alpha = \frac{1}{2}$) обычно рассматривается лакунарность вида $\frac{n(k+1)}{n(k)} > 1+\frac{c_k}{\sqrt{k}}$, где $\{c_k\}$ — неограниченная, монотонно возрастающая (но не быстрее, чем $\sqrt{k}$) последовательность. Оказывается, равенство (1) начинает «пропадать», если последовательность $\{n(k)\}$ растёт не слишком быстро, создавая сравнительно небольшие пробелы в номерах последовательности $\{n(k)\}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Существует последовательность* $\{n(k)\}$, *для которой*

$$\frac{n(k+1)}{n(k)} > 1 + \frac{\log(\log k)}{\sqrt{k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{"регулярная"лакунарность}),$$

и такая, что при этом для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ *закон повторного логарифма не выполняется, т.е. равенство* (1) *не имеет места.*

Этот факт уточняет результат, полученный в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Серия математическая, матем. анализ, М.: ВИНИТИ, 1971. С. 147–202.

[2] *Revesz P., Wschebor M.* On the statistical properties of the Walsh functions // Publ. Math. Ins. Hung. Acad. Sci. Ser. A. 1964. Vol. 9, Fasc. 3. P. 543–554.

[3] *Foldes A.* Further statistical properties of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1972. Vol. 7. P. 147–153.

[4] *Takahashi S.* A statistical property of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1975. Vol. 10. P. 93–98.

[5] *Левизов С. В.* ЗПЛ для лакунарных рядов по системе Уолша // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 69–77.

[6] *Курбыко И. Ф., Левизов С. В.* Критический случай лакунарности в ЗПЛ для рядов по системе Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й международн. Саратовской зимней школы. Саратов : Изд-во ООО «Научная книга», 2018. С. 172–173.