УДК 517.96,517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И ОДНОПОРЯДКОВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ С ПРОИЗВОДНОЙ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KhromovAP@info.sgu.ru

С помощью идей Эйлера об использовании расходящихся рядов получены необходимые и достаточные условия существования классическоего решения смешанной задачи для волнового уравнения и обобщенное решение с суммируемой начальной функцией.

Ключевые слова: метод Фурье, расходящиеся ряды, волновое уравнение.

CLASSICAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF THE MIXED PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS EQUATION WITH ZERO INITIAL SPEED AND SINGLE-ORDER BOUNDARY CONDITIONS WITH A DERIVATIVE

V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KhromovAP@info.sgu.ru

Using Euler's ideas about using divergent series, the necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the wave equation and a generalized solution with a summable initial function are obtained.

Keywords: Fourier method, divergent series, wave equation.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — комплекснозначные функции, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не выходят за рамки $L[0,1]$, комплекснозначная $f(x,t) \in L[Q_T]$, $Q_T = \{x,t|\ x \in [0,1],\ t \in [0,T]\}$ при любом $T > 0$.

Применяем новый прием в методе Фурье, основанный на использовании расходящихся рядов в понимании Эйлера [1] (важная информация о расходящихся рядах приведена также в [2]), позволяющий получать новые результаты, избегая при этом дополнительных трудностей, возникающих при обосновании промежуточных утверждений.

Формальное решение по методу Фурье берем в виде [3]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} +$$

$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Big]\,d\lambda, \tag{4}$$

где $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, R_λ — резольвента опертора $Ly = -y'' + q(x)y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $r > 0$ и достаточно велико, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho|\,|\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано, контуры $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \ge n_0$ не пересекаются, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Обозначим $Z(x,t,\varphi)$ ряд (4) при $\psi(x) = f(x,t) = 0$. Тогда формальный ряд (4), как и в [2, формула (8)] использованием расходящихся рядов приводится к виду

$$u(x,t) = Z(x,t,\varphi) + \int\limits_0^t Z(x,t,\psi)\,d\tau + \int_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{5}$$

Важность формулы (5) в том, что в формальном решение неоднородной задачи (1)–(3) участвует лишь формальное решение такой однородной задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - q(x)u(x,t), \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0), \tag{7}$$

$$u_x'(0,t) = u_x'(1,t) = 0, \tag{8}$$

но при различных $\varphi(x)$.

Рассматриваем задачу (6)–(8).

Аналогично [4], с помощью рекомендаций А. Н. Крылова [5], идей Эйлера о расходящихся рядах и формулы (5), от ряда $Z(x,t,\varphi)$ переходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t),$$

где

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\, d\eta, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$\tilde{\varphi}(x)$ есть четное 2-периодическое продолжение на всю ось функции $\varphi(x)$, $x \in [0,1]$, $\tilde{f}_n(\eta,\tau)$ — четная 2-периодическая по η и $\tilde{f}(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$ и пусть $T > 0$, произвольно и m — наименьшее натуральное число, такое, что $T \leq m$. Тогда*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \leq C_T\|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, то ряд $A_1(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T с экспоненциальной скоростью.*

Теорема 2. *Для того, чтобы существовало классическое решение задачи (6)–(8), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Это решение дается формулой $u(x,t) = A(x,t)$. Оно является единственным среди решений из класса $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$.*

Теорема 3. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$ и $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи (6)–(8) для $u_h(x,t)$ с $\varphi_h(x)$ вместо $\varphi(x)$ и $\lim\limits_{h\to 0}\|\varphi_h - \varphi\|_1 = 0$, то $\lim\limits_{h\to 0}\|u_h(x,t) - A(x,t)\|_{L[Q_T]} = 0$.*

Таким образом, $u(x,t) = A(x,t)$ является обобщенным решением задачи (6)–(8).

Подробные доказательства подобных теоремам 1–3 для задачи (6), (7) с граничными условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ приведены в [4, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[2] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международ. Сарат. зим. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. **??**–439.

[3] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, вып. 2. С. 286–300. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919020091

[4] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

[5] *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

[6] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: https://doi.org/10.1134/s0374064119050121