УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА СТРУКТУРАХ ИЗ ОТРЕЗКОВ[1]

М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)
kuznetsovama@info.sgu.ru

Рассмотрены дифференциальные операторы Штурма – Лиувилля на структурах, состоящих из конечного числа отрезков, со спектральным параметром в условиях склейки. Мы исследовали свойства спектральных характеристик данных операторов и получили асимптотические формулы для собственных значений и весовых чисел. Также доказана теорема единственности восстановления оператора по спектральным данным трех типов: двум спектрам; одному спектру и весовым числам; функции Вейля.

Ключевые слова: операторы Штурма – Лиувилля, замкнутые множества, асимптотические формулы, обратные спектральные задачи.

SPECTRAL ANALYSIS OF STURM – LIOUVILLE OPERATORS ON THE SEGMENT STRUCTURES[1]

M. A. Kuznetsova (Saratov, Russia)
kuznetsovama@info.sgu.ru

In the paper, Sturm–Liouville differential operators on structures consisting of a finite number of segments with a spectral parameter in matching conditions are considered. We study properties of their spectral characteristics and obtain asymptotic formulae for eigenvalues and weight numbers. Uniqueness theorem is proved as well for recovering an operator from the spectral data of three types: two spectra; the spectrum and the weight numbers; Weyl function.

Keywords: Sturm–Liouville operators, closed sets, asymptotic formulae, inverse spectral problems.

Введение

Дифференциальные уравнения на графах возникают при моделировании различных процессов (примеры и основы теории см. в [2, 3]). В работе рассматривается граф-цепочка Γ, состоящий из вершин $\{v_l\}_{l=1}^{N+1}$ и неориентированных ребер $e_k = (v_k, v_{k+1})$, $k = \overline{1, N}$, где N — натуральное число. Обозначим длину e_k числом $d_k > 0$ и зададим параметризацию $x_k \in [0, d_k]$ так, что $x_k = 0$ соответствует вершине v_k, а $x_k = d_k$ — вершине v_{k+1}. Тогда уравнение Штурма – Лиувилля на Γ записывается следующим образом:

$$-y_k''(x_k) + q_k(x_k)y_k(x_k) = \lambda y_k(x_k), \quad x_k \in (0, d_k),\ k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 19-71-00009).
[1]This work was supported by Grant 19-71-00009 of the Russian Science Foundation.

где $q = [q_k]_{k=1}^N$ — вещественный потенциал, $q_k \in C[0, d_k]$, $y = [y_k]_{k=1}^N$ — решение, а k-е компоненты определены на ребре e_k.

В качестве условий склейки возьмем

$$\left.\begin{aligned} y_{l+1}(0) &= \alpha_{11}^l(\lambda) y_l(d_l) + \alpha_{12}^l(\lambda) y_l'(d_l), \\ y_{l+1}'(0) &= \alpha_{21}^l(\lambda) y_l(d_l) + \alpha_{22}^l(\lambda) y_l'(d_l), \end{aligned} \quad l = \overline{1, N-1}, \right\} \tag{2}$$

с коэффициентами $\alpha_{11}^l(\lambda) := 1$, $\alpha_{12}^l(\lambda) := t_l$, $\alpha_{21}^l(\lambda) := t_l(q_l(d_l) - \lambda)$, $\alpha_{22}^l(\lambda) := 1 + t_l^2(q_l(d_l) - \lambda)$, где $t_l > 0$, $l = \overline{1, N-1}$.

Уравнения (3) вместе с условиями склейки (2) эквивалентны следующему уравнению с Δ-производными на замкнутом множестве, состоящем из N отрезков:

$$-y^{\Delta\Delta}(x) + q(x) y(\sigma(x)) = \lambda y(\sigma(x)), \quad x \in \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k],$$

где $b_k = a_k + d_k$, $k = \overline{1, N}$, $a_{l+1} = b_l + t_l$, $l = \overline{1, N-1}$. Определения $\sigma(x)$ и Δ-производной даны в [3] и [1].

1. Свойства спектральных характеристик

Обозначим L_j краевую задачу для (3), (2) с краевыми условиями

$$y^{(j)}(v_1) := y_1^{(j)}(0) = 0, \quad y(v_{N+1}) := y_N(d_N) = 0, \quad j = 0, 1.$$

Пусть $S = [S_k(x_k, \lambda)]_{k=1}^N$ и $C = [C_k(x_k, \lambda)]_{k=1}^N$ являются решениями (3), (2) с начальными условиями

$$S_1'(0, \lambda) = C_1(0, \lambda) = 1, \ S_1(0, \lambda) = C_1'(0, \lambda) = 0.$$

Введем целые функции

$$\Theta_0(\lambda) := S_N(d_N, \lambda), \ \Theta_1(\lambda) := C_N(d_N, \lambda).$$

Для $j = 0, 1$ собственные значения $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$ краевой задачи L_j совпадают с нулями целой функции $\Theta_j(\lambda)$, которая является характеристической функцией L_j. Из вещественности q следует, что эти нули — простые и вещественные. Кроме того, $\Theta_0(\lambda)$ и $\Theta_1(\lambda)$ не имеют общих нулей.

Пусть $\Phi = [\Phi_k(x_k, \lambda)]_{k=1}^N$ является решением (3), (2) при условиях

$$\Phi_1'(0, \lambda) = 1, \quad \Phi_N(d_N, \lambda) = 0.$$

Назовем $M(\lambda) := \Phi_1(0,\lambda)$ функцией Вейля. Нетрудно проверить, что

$$\Phi = S + M(\lambda)C, \quad M(\lambda) = -\frac{\Theta_0(\lambda)}{\Theta_1(\lambda)}.$$

Введем весовые числа

$$\alpha_n := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n1}} M(\lambda) = -\frac{\Theta_0(\lambda_{n1})}{\Theta_1'(\lambda_{n1})}, \quad n \geq 1.$$

Можно показать, что $\alpha_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$.

Функция Вейля $M(\lambda)$, спектры $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}, j = 0,1$, и весовые числа $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ называются спектральными характеристиками.

При выводе асимптотических формул для спектральных характеристик необходимо условие соизмеримости длин ребер:

$$d_k = rx_k,\ x_k \in \mathbb{Q}, \quad k = \overline{1,N},\ \text{для некоторого } r > 0. \tag{3}$$

Условие соизмеримости ребер графа используется также в [5].

Теорема 2. *Каждый спектр состоит из $N+1$ части:*

$$\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1} = \Lambda_j \bigcup \Big(\bigcup_{k=1}^{N} \{(\rho_{nj}^{(k)})^2\}_{n\geq 1} \Big), \quad j = 0,1,$$

где Λ_j — конечное множество из $N + j\,\mathrm{sign}(N-1) - 1$ элементов,

$$\rho_{nj}^{(k)} = \frac{\pi(n - \delta_k^{j\delta(1,k)})}{d_k} + r_{nj}^{(k)}, \quad r_{nj}^{(k)} = o(1), \quad \delta_k^j \in \Big\{0, \frac{1}{2}\Big\},\ \delta_k^1 + \delta_k^0 = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Обозначим

$$z_k := \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\int_0^{d_k} q_k(x)\,dx + \sum_{l=\max(1,k-1)}^{\min(k,N-1)} t_l^{-1}\Big), \quad k = \overline{1,N}.$$

Если выполнено (3) *и числа z_k, $k = \overline{1,N}$, различны, то в* (4)

$$r_{nj}^{(k)} = \frac{z_k + \kappa_{nkj}}{n},\ \{\kappa_{nkj}\}_{n\geq 1} \in l^2, \quad k = \overline{1,N}.$$

Теорема 3. *Обозначим*

$$\alpha_n^k := \operatorname*{Res}_{\lambda=(\rho_{n1}^{(k)})^2} M(\lambda).$$

Если выполнено (3) *и числа z_k, $k = \overline{1,N}$, различны, то*

$$\alpha_n^k = \begin{cases} \dfrac{2}{d_1}\Big(1 + \dfrac{\kappa_{nk2}}{n}\Big), & k = 1, \\ \dfrac{\kappa_{nk2}}{n}, & k > 1, \end{cases} \quad \{\kappa_{nk2}\}_{n\geq 1} \in l^2.$$

2. Обратные задачи

Рассмотрим три следующих обратных задачи.

Обратная задача 1. По $M(\lambda)$ восстановить q.

Обратная задача 2. По $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$, восстановить q.

Обратная задача 3. По $\{\lambda_{n1}\}_{n\geq 1}$ и $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ восстановить q.

Данные три задачи эквивалентны: по входным данным одной задачи можно восстановить входные данные любой другой задачи. В частности,

$$M(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda - \lambda_{n1}}.$$

Кроме краевой задачи L_0, зассмотрим задачу $\tilde{L}_0$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde{q}$. Пусть символ γ обозначает объект, относящийся к L_0, тогда $\tilde{\gamma}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}_0$.

Используя метод спектральных отображений [5], мы доказали теорему единственности решения обратных задач 1–3.

Теорема 4. *Если выполнено одно из следующих условий, то* $q = \tilde{q}$:

1. $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$;

2. $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1} = \{\tilde{\lambda}_{nj}\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$;

3. $\{\lambda_{n1}\}_{n\geq 1} = \{\tilde{\lambda}_{n1}\}_{n\geq 1}$ *и* $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} = \{\tilde{\alpha}_n\}_{n\geq 1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Berkolaiko G., Kuchment P.* Introduction to Quantum Graphs. Providence, RI : AMS, 2013. 270 p.

[2] *Покорный Ю. В, Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.

[3] *Yurko V.* Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators on closed sets // Tamkang journal of mathematics. 2019. Vol. 50, № 3. P. 199–206.

[4] *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales. Boston, MA : Birkhäuser, 2001. 358 p.

[5] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm – Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. Vol. 42. P. 1512–1528.

[6] *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов : Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 365 с.